

Klausur Analysis 1 vom 4. August 2025

Dozent: Prof. Dr. T. de Jong

Die Klausur hat **NEUN (9)** Aufgaben. Totale Punktzahl: **109**.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1. (7 x 3 P.)

- (a) Geben Sie die Definition einer konvergenten Folge an.
- (b) Was bedeutet die “Stetigkeit der Addition”?
- (c) Wann und wie ist das Infimum einer Menge von reellen Zahlen definiert?
- (d) Was ist die Definition einer absolut konvergenten Reihe?
- (e) Was besagt der große Umordnungssatz?
- (f) Was ist der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung?
- (g) Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit an .

Aufgabe 2. (2 x 3 P.)

- (a) Schreiben Sie die Halbierungsformel für $\cos(x)$ auf, also $\cos(x/2) = \dots$.
- (b) Bestimmen Sie $\cos(\pi/8)$.

Aufgabe 3. (3 x 3 P.) Bestimmen Sie die nachfolgenden Grenzwerte, falls diese existieren.

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$

Aufgabe 4. (3 + 3 P.) Sei $z = 1 + \sqrt{3}i$.

- (a) Bestimmen Sie $|z|$ und $\text{Arg}(z)$.
- (b) Bestimmen Sie z^{37} .

BITTE WENDEN!

Aufgabe 5. (13 P.) Es sei

$$f(x) = (1 + x)^{-1/3}$$

Bestimmen Sie $T_0^2 f(x)$ und $T_0^2 f(1/4)$. Schätzen Sie mit dem Lagrange-Restglied den Fehler dieser Annäherung von $f(1/4)$ ab.

Aufgabe 6. (5 x 4 P.) Bestimmen Sie die nachfolgenden Integrale:

- (a) $\int_0^\pi x \sin(x) dx$
- (b) $\int_0^2 \frac{x}{1 + x^2} dx$
- (c) $\int_0^1 \frac{x - 1}{x^2 + 3x + 2} dx$
- (d) $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$
- (e) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} dx$

Aufgabe 7. (4 x 4 P.) Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergieren.

- (a) $\sum_{n=1}^\infty \sin^2(1/n)$
- (b) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$
- (c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n}$
- (d) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$

Aufgabe 8. (3 + 6 P.) Sei $f(x) = \sum_{n=1}^\infty n(n + 1)x^n$

- (a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.
- (b) Bestimmen Sie den Wert von $f(x)$.

Aufgabe 9. (3 x 3 P.) Sei $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

- (a) Zeigen Sie, dass $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise konvergent ist.
- (b) Ist (f_n) auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergent?
- (c) Ist (f_n) auf $[1, \infty)$ gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 1

- a) (a_n) konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$
 $\forall c, d \in \mathbb{R}$ mit $a \in (c, d)$ gilt
 $a_n \in (c, d)$ für fast alle n .
- b) Sind (a_n) und (b_n) konvergent, so ist
auch $(a_n + b_n)$ konvergent und
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$
- c) Definiert für $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ von unten beschränkt
 $\inf(A) = \max \{b: b \text{ untere Schranke von } A\}$
- d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert}$$
- e) Sei $\sigma: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ bijektiv, $a_{ij} \in \mathbb{R}$
 $\forall (i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Dann
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} \text{ absolut konvergent} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \text{ absolut konvergent}$$

und dann gilt:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$$
- f) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $F(x) := \int_a^x f(t) dt$
diffbar und $F'(x) = f(x)$
- g) f differenzierbar in $a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
existiert.

Aufgabe 2:

a) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$\Rightarrow 2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$

$x = x/2 \Rightarrow$

$\cos(x/2) = \pm \sqrt{(1 + \cos(x))/2}$

b) $\cos(\pi/4) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

$\Rightarrow \cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}}$

Aufgabe 3

a) L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)} = \frac{\sin(1) - 1}{\cos(1)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ weil } \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

Aufgabe 4

$$a) \quad |z| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \boxed{2}$$

$$\cos(\operatorname{Arg}(z)) = \frac{1}{2}, \quad \sin(\operatorname{Arg}(z)) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(z) = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$

$$b) \quad |z^{37}| = |z|^{37} = 2^{37}$$

$$\operatorname{Arg}(z^{37}) = 37 \operatorname{Arg}(z) = \frac{37\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \bmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow z^{37} = 2^{37} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i \right)$$

$$= \boxed{2^{36} + 2^{36}\sqrt{3}i}$$

Aufgabe 5

$$T_0^2 f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} x^2$$

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = -\frac{1}{3} (1+x)^{-4/3}, \quad f'(0) = -\frac{1}{3}$$
$$f''(x) = \frac{4}{9} (1+x)^{-7/3}, \quad f''(0) = \frac{4}{9}$$

$$\boxed{T_0^2 f(x) = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{2}{9} x^2}$$

$$T_0^2 f\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{12} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{16} = \boxed{\frac{67}{72}}$$

$$x > 0: \quad R_0^2 f(x) = \frac{f^{(3)}(3)}{3!} x^3, \quad \xi \in (0, x)$$

$$f^{(3)}(2) = \frac{-28}{27} (1+x)^{-10/3}$$

$\underbrace{\quad}_{\leq 1} \quad \text{für } x > 0.$

$$\Rightarrow \quad -\frac{28}{27} < f^{(3)}(\xi) < 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{28}{27} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} < R_0^2 f\left(\frac{1}{4}\right) < 0}$$

Aufgabe 7

a) $\forall x > 0: 0 < \sin(x) < x$

$\Rightarrow \forall n: 0 < \sin(1/n^2) < 1/n^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n^2) \text{ [konvergent]}$
nach dem Vergleichskriterium

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln(x)} = 0, \frac{1}{x \ln(x)} \text{ fallend}$

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(x)) \Big|_2^{\infty} = \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \text{ [divergent]} \text{ (via Integralkriterium)}$

c) Quotientenkriterium:

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$

Die Reihe ist ~~divergent~~ [konvergent].

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$

$\left(\frac{\ln(x)}{x} \right)' = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0 \quad \forall x > 1$

• (a_n) fallend

• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} \text{ ist [konvergent]}$

(Leibniz-Kriterium)

Aufgabe 8

a) $a_n := n \cdot (n+1)$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{n \cdot (n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Konvergenzradius $= \boxed{1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} \quad | \cdot x$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (n+1) x^n = \boxed{x \cdot \frac{2}{(1-x)^3}}$$

Aufgabe 9

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{e^{nx}} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{x e^{nx}} = 0$$

$$\forall x > 0 \\ x=0: \lim_{n \rightarrow \infty} nx e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

b) Wir berechnen das Maximum auf $[0, \infty)$

+c)

$$f_n'(x) = n e^{-nx} + nx e^{-nx} \cdot (-n) = 0 \\ \Rightarrow x = 1/n$$

Maximum bei $x = 1/n$ und gleich

$$f_n(1/n) = e^{-1}$$

$$f_n(x) < 0 \quad \text{für} \quad x > 1/n$$

$$b): \text{Auf } [0, 1]: \|f_n\|_{[0, 1]} = e^{-1}$$

$$\not\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Also auf $[0, 1]$ nicht gleichmäßig konvergent.

$$c) \|f_n\|_{[1, \infty)} = |f_n(1)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

also gleichmäßig konvergent auf $[1, \infty)$