Übungsblatt 5

Abgabe am Freitag, 22.11.2019 bis 23:59 Uhr

Aufgabe 1.1. Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Zeigen Sie, dass $h_K = 1$.
[Benutzen Sie bitte nur die "schwache Minkowksi-Schranke" aus der Vorlesung.]

Aufgabe 1.2. Zeige, dass es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L gibt, in der jedes gebrochene Ideal von K ein Hauptideal wird.

Aufgabe 1.3. Benutzen Sie Minkowski's Satz um Zahlkörpern $K_1, K_2, \ldots$ zu konstruieren, so daß $|d_{K_n}| \to \infty$ wenn $n \to \infty$.

Aufgabe 1.4. Sei K ein Zahlkörper, und $n \geq 1$ eine Zahl. Für wieviel Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ gilt $N(\mathfrak{a}) = n$?

Aufgabe 1.5. Sei F ein nicht-total reeller Zahlkörper. Zeigen Sie, dass es eine Primzahl p gibt so dass p verzweigt in F.
[Diese Aussage beweisen wir später ohne die Annahme dass F ein nicht-total reeller Zahlkörper ist.]

Aufgabe 1.6. Sei $d \equiv 1 \mod 4$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 4$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen hat.

Aufgabe 1.7. Bestimmen Sie eine Fundamentale Einheit für $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 1.8. Sei $a \in \mathbb{Z}$. Wie viele, bis auf Assoziierte, Elemente $\alpha \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$ gibt es mit $1 \leq N(\alpha) \leq a$?