

Take Home Exam

Abgabe am Dienstag, 30.07.2019 bis 23 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 1.1. Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Die Diskriminante eines Zahlkörpers ist immer quadratfrei.
2. Sei K ein Zahlkörper. Der Ring \mathcal{O}_K ist genau dann ein freier \mathbb{Z} -Modul, wenn \mathcal{O}_K ein Hauptidealring ist.
3. Ein diskreter Bewertungsring ist ein Hauptidealring.
4. Ein Zahlkörper vom Grad $2k + 1$ besitzt nur die Einheitswurzeln 1 und -1 .
5. Jeder quadratische Zahlkörper ist Teilkörper eines zyklotomischen Körpers.
6. In $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ sind alle Primideale $(p) \subset \mathbb{Z}$ mit $(p, n) = 1$ vollständig zerlegt.
7. Es gibt einen Zahlkörper K/\mathbb{Q} , der alle Einheitswurzeln enthält.
8. Die Gruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ ist unendlich.

Aufgabe 1.2. Welche Primzahlen verzweigen in der Erweiterung $\mathbb{Q}(2^{1/3})$?

Aufgabe 1.3. Sei K ein Zahlkörper mit Galois-Abschluss N über \mathbb{Q} . Beweisen Sie: Eine Primzahl p ist vollständig zerlegt in K genau dann wenn p in N vollständig zerlegt ist.

Aufgabe 1.4. Geben Sie an wie jede Primzahl in $\mathbb{Q}(\zeta_{42})$ verzweigt ist.