

## Übungsblatt 2

Abgabe am Freitag, 24.05.2019 bis 23 Uhr

**Aufgabe 2.1.** Im Folgenden betrachten wir den Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ . Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  ist ein Unterring von Index 2 des Ringes  $\mathbb{Z}[\rho]$  aus Aufgabe 1.3.
- (b) Jedes Ideal in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  ist von der Form  $x\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  oder  $x\mathbb{Z}[\rho]$  für ein  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ .
- (c) Der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  ist ein Hauptidealring.

**Aufgabe 2.2.** Beweisen Sie: Ist ein Integritätsbereich  $A$  normal, so ist der Ring  $A[x]$  normal.

**Aufgabe 2.3.** Im Folgenden betrachten wir den Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ . Beweisen Sie:

- (a) Die Einheitengruppe  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$  von  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  ist  $\{-1, 1\}$ .
- (b) Die Elemente  $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}$  sind alle irreduzibel in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .
- (c) Die Abbildung

$$\psi: \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \rightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto (a + 3b \pmod{7})$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

- (d) Der Kern von  $\psi$  ist das Ideal  $(7, 4 + \sqrt{-5})$ , welches kein Hauptideal ist.
- (e) Das Ideal  $(21) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  besitzt in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  die folgende Zerlegung in Primideale:

$$(21) = (3, 1 + \sqrt{-5}) \cdot (3, 1 - \sqrt{-5}) \cdot (7, 4 + \sqrt{-5}) \cdot (7, 4 - \sqrt{-5}).$$

- (f) Jedes Produkt zweier Primideale aus der obigen Zerlegung von  $(21)$  ist ein Hauptideal.