

Übungsblatt 1

Abgabe am Freitag, 03.05.2019 bis 18 Uhr

Aufgabe 1.1. Beweisen oder widerlegen Sie: Falls R ein endlicher Ring ist, so ist jedes $r \in R \setminus \{0\}$ eine Einheit oder ein Nullteiler.

Aufgabe 1.2. Es sei R ein kommutativer Ring und $R' \subseteq R$ ein Unterring. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Ist R ein Körper, so ist auch R' ein Körper.
- (b) Ist R ein noetherscher Ring, so ist auch R' ein noetherscher Ring.
- (c) Ist R' ein noetherscher Ring, so ist auch R ein noetherscher Ring.
- (d) Ist R ein Integritätsring, so ist auch R' ein Integritätsring.
- (e) Ist R' ein Integritätsring, so ist auch R ein Integritätsring.
- (f) Ist R ein Hauptidealring, so ist auch R' ein Hauptidealring.
- (g) Ist R' ein Hauptidealring, so ist auch R ein Hauptidealring.
- (h) Ist R ein faktorieller Ring, so ist auch R' ein faktorieller Ring.
- (i) Ist R' ein faktorieller Ring, so ist auch R ein faktorieller Ring.
- (j) Es gilt $\dim R' \leq \dim R$.

Aufgabe 1.3. Es sei $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^2 + X + 1$. Die Eisenstein-Zahlen sind die komplexen Zahlen der Form $a + b\rho$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie:

- (a) Die Menge $\mathbb{Z}[\rho] = \{a + b\rho \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$ und die Normabbildung

$$N: \mathbb{Z}[\rho] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a + b\rho \mapsto |a + b\rho|^2 = a^2 - ab + b^2$$

ist multiplikativ.

- (b) Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\rho]^*$ ist zyklisch von der Ordnung 6 und wird von ρ erzeugt.
- (c) Der Ring $\mathbb{Z}[\rho]$ ist ein Hauptidealring.
- (d) Jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \equiv 2 \pmod{3}$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[\rho]$.
- (e) Jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \equiv 1 \pmod{3}$ lässt sich als Produkt $p = \pi \bar{\pi}$ für ein $\pi \in \mathbb{Z}[\rho]$ schreiben.
- (f) Jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \not\equiv 2 \pmod{3}$ lässt sich in der Form $p = x^2 + 3y^2$ für eindeutige $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ darstellen.