ARIYAN JAVANPEYKAR & MAXIMILIAN PREISINGER

Präsenzaufgabe 15.1 Es sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit p Elementen. Dann ist G zyklisch.

Präsenzaufgabe 15.2 Zeigen Sie, dass die Gruppen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

Präsenzaufgabe 15.3 Es sei $G = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$ eine endliche erzeugte Gruppe und $\varphi\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass φ durch $g_i' := \varphi(g_i)$, $i = 1, \ldots, k$, eindeutig bestimmt wird.

Präsenzaufgabe 15.4 Für eine Gruppe G definieren wir die Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ als die kleinste Untergruppe von G, die alle Elemente der Form $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ mit $g, h \in G$ enthält. Zeigen Sie:

a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler von G.

b) Die Gruppe $G/[G, G]$ ist abelsch.

c) Ist N ein Normalteiler von G und gilt $[G, G] \subset N$, so ist G/N abelsch.

d) Ist N ein Normalteiler von G und ist G/N abelsch, so ist $[G, G] \subset N$.

Aufgabe 15.1 (2+2 Punkte) Es sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n.

a) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von G zyklisch ist.
Hinweis: Division mit Rest.

b) Zeigen Sie, dass für jeden positiven Teiler d von n genau eine Untergruppe von G der Ordnung d existiert.

Aufgabe 15.2 (1+1+2+1+1+2 Punkte) Zeigen Sie:

a) Es sei G eine endliche Gruppe und S eine Teilmenge von G, sodass $|S| > \frac{1}{2}|G|$. Dann ist $\langle S \rangle = G$.

b) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist H genau dann ein Normalteiler, wenn $gHg^{-1} \subset H$ für alle $g \in G$ ist.

c) Es sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung $2n$. Dann gibt es ein Element in G der Ordnung 2.

d) Es sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung $2n$, wobei n ungerade ist. Dann gibt es höchstens (und damit genau) ein Element in G der Ordnung 2.

e) Es sei G eine Gruppe. Die Abbildung $\varphi\colon G \to G, x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn G abelsch ist.

f) Es sei $\varphi\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Es sei $x \in G$ ein Element endlicher Ordnung. Dann hat $\varphi(x)$ endliche Ordnung in G' und $\operatorname{ord}(\varphi(x))|\operatorname{ord}(x)$.

Aufgabe 15.3 (2+2+2 Punkte) Es sei G die Menge der reellen, invertierbaren oberen 2×2-Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie:

a) G ist eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$.

b) $N := \{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$ ist ein Normalteiler von G.

c) G/N ist abelsch.
Hinweis: Benutzen Sie Präsenzaufgabe 15.4 c)

Aufgabe 15.4 (1+1 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Mit $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichnen wir die Gruppe (bezüglich der Komposition) der Gruppenisomorphismen $G \to G$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}, +)$ endlich ist.

b) Zeigen Sie: $\#\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = p - 1$.

Aufgabe 15.5 (1+1+1+1 Punkte) Bestimmen Sie die Mächtigkeiten der folgenden Mengen:

a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

b) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$.

c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$.

d) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.

Hinweis: Aufgabe 15.2 f)

Aufgabe 15.6 (1+1 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es existiert eine Gruppe G sowie ein Gruppenhomomorphismus $G \to G$, der surjektiv, aber nicht injektiv ist.

b) Es existiert eine Gruppe G sowie ein Gruppenhomomorphismus $G \to G$, der injektiv, aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 15.7 (3 Punkte) Geben Sie drei Gruppen der Ordnung 8 an, die paarweise nicht isomorph zueinander sind.

Aufgabe 15.8 (2 Punkte) Es sei G eine Gruppe und $\mathrm{Z}(G)$ das Zentrum von G. Zeigen Sie: Ist $G/\mathrm{Z}(G)$ zyklisch, so ist G abelsch.

Aufgabe 15.9 (1+2 Punkte) Es sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine Untergruppe von G.

a) Zeigen Sie, dass HN eine Untergruppe von G ist.

b) Es sei nun H sowohl ein Normalteiler von G als auch ein Normalteiler von N. Zeigen Sie, dass N/H ein Normalteiler von G/H ist und dass $(G/H)/(N/H)$ isomorph zu G/N ist.

Aufgabe 15.10 (2 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: Jede Untergruppe $H \subset G$ von Index 2 ist ein Normalteiler.