Kurztest 2 in Lineare Algebra und Geometrie 2

Ariyan Javanpeykar & Maximilian Preisinger 6. Dezember 2018

Name: ____________________ Unterschrift: ____________________
Matrikel-Nummer: ____________________

Spielregeln: Sie können bei jeder Aufgabe 10 Punkte erreichen. Zum Bestehen benötigen Sie 20 der 40 erreichbaren Punkte.
Sie müssen Ihre gegebenen Antworten **nicht** begründen!

Aufgabe 1.1 Wir betrachten eine reelle Matrix A. Die nachfolgende reelle Matrix B sei eine Jordan-Normalform für A bezüglich der Basis $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ von $\mathbb{R}^5$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A: $M_A(x) =$ ____________________

b) Drücken Sie Ab_2 als Linearkombination der Basisvektoren b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 aus:

$Ab_2 =$ ____________________

c) Bestimmen Sie $\dim(\operatorname{Ker}(A - 2\mathrm{Id})) =$ ____________________

d) Bestimmen Sie $\dim \operatorname{Ker}(A^2) =$ ____________________

Aufgabe 1.2 Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, welche sind **falsch**?

Jede diagonalisierbare $n \times n$-Matrix besitzt eine Jordan-Normalform.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix mit Eigenwert λ, wobei $n \geq 2$ ist. Dann ist der Eigenraum von A zu λ, $\mathrm{Eig}_\lambda(A)$, ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Für jede reelle, nilpotente $n \times n$-Matrix A gilt: $\dim \mathrm{Eig}_0(A) \leq \dim \operatorname{Ker}(A^3)$.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Jede komplexe $n \times n$-Matrix ist trigonalisierbar.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix. Jeder eindimensionale A-invariante Unterraum von $\mathbb{R}^n$ enthält einen Eigenvektor von A.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Bitte wenden!
Please turn the page!

Aufgabe 1.3 Welche der folgenden Aussagen sind **wahr**, welche sind **falsch**?

Die Teilmengen $A = \{a \mid a \in \mathbb{Z},\ a^2 = 1\}$ und $B = \{b^2 \mid b \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{Z}$ sind gleichmächtig.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sind gleichmächtig. (Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}$ die Potenzmenge.)
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Jede surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist injektiv.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{1, 2\}$. Es gibt genau 9 verschiedene Abbildungen $f\colon A \to B$.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Es gelte das Auswahlaxiom. Dann hat jede Menge eine Wohlordnung.
☐ **wahr** ☐ **falsch**

Aufgabe 1.4 Es sei A eine komplexe 5×5-Matrix mit Minimalpolynom $M_A(x) = (x-1)(x-2)^2$. Geben Sie alle vier möglichen, essentiell verschiedenen (d.h. verschieden bis auf Vertauschung der Jordan-Blöcke) Jordan-Normalformen für A an. (Es genügt, wenn Sie in den Matrizen nur die Einträge ungleich 0 notieren.)