Ariyan Javanpeykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 14.1 Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$. Es seien $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die von m und n erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}$.

Präsenzaufgabe 14.2 Es sei $\varphi \colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) $\varphi(e_G) = e_H$ und $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$.

b) Ist $\varphi \colon G \to H$ ein Isomorphismus, so ist $\varphi^{-1} : H \to G$ ein Homomorphismus (und damit auch ein Isomorphismus).

c) φ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(\varphi) := \varphi^{-1}(e_H) = \{e_G\}$.

Präsenzaufgabe 14.3 Eine Gruppe G heißt endlich erzeugt, wenn es eine endliche Teilmenge $S \subset G$ gibt, sodass $\langle S \rangle = G$.

a) Zeigen Sie: Jede endliche Gruppe ist endlich erzeugt.

b) Finden Sie eine unendliche Gruppe, die endlich erzeugt ist.

c) Finden Sie eine unendliche Gruppe, die nicht endlich erzeugt ist.

d) Zeigen Sie: Sind G und H endlich erzeugte Gruppen, so ist $G \times H := \{(g, h) \colon g \in G, h \in H\}$ eine endlich erzeugte Gruppe.

Präsenzaufgabe 14.4 Sind die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen?

a) $\det \colon \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +),\ A \mapsto \det(A)$

b) $\det \colon (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ A \mapsto \det A$

c) $\exp \colon (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto e^x$

d) $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ x \mapsto \exp(x^2)$

e) $\mathrm{sgn} \colon S_n \to (\{1, -1\}, \cdot),\ \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)$.

f) $\mathrm{Sp} \colon (\mathrm{O}(n), \cdot) \to (\mathbb{R}, +),\ A \mapsto \mathrm{Sp}(A)$
Dabei ist $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die orthogonale Gruppe (bezüglich Matrixmultiplikation).

g) $(\mathrm{U}(m), \cdot) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ A \mapsto -\det(A)$
Dabei ist $\mathrm{U}(m) \subset \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ die unitäre Gruppe.

h) $\varphi + \psi \colon G \to H,\ a \mapsto \varphi(a) + \psi(a)$, wobei G und H abelsche Gruppen und $\varphi, \psi \colon G \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen sind.

i) $(\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}), +) \to (\mathbb{C}, +),\ A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

j) $\varphi_r \colon (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ A \mapsto r \cdot \det A^{-1}$, wobei $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.1 (2 Punkte) Es sei G eine Gruppe und H eine nicht-leere Teilmenge von G, sodass gilt:

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H.$$

Zeigen Sie: Dann ist H eine Untergruppe von G.

Aufgabe 14.2 (2 Punkte) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe. Sei $x \in G$ fest gewählt. Zeigen Sie:

$$\prod_{g \in G} xg = \prod_{g \in G} g.$$

Folgern Sie: $x^{|G|} = e$ und $\operatorname{ord}(g)$ teilt $|G|$. *Hinweis zur letzten Folgerung:* Teilung mit Rest.

Aufgabe 14.3 (2 Punkte) Es sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, in der jedes Element endliche Ordnung hat. Zeigen Sie, dass G endlich ist.

Aufgabe 14.4 (1 Punkt) Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut}(G)$, die Menge aller Gruppenautomorphismen (bijektiven Gruppenhomomorphismen $G \to G$), bezüglich der Komposition eine Gruppe ist.

Aufgabe 14.5 (1+1+1 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es sei V ein K-Vektorraum und H eine Untergruppe von $(V, +)$. Dann ist H ein Untervektorraum von V.

b) Es sei G die Gruppe aller bijektiven Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich Komposition. Dann ist die Menge H aller invertierbaren linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Untergruppe von G.

c) Es sei G eine abelsche Gruppe, sodass jedes Element in G endliche Ordnung hat. Dann ist G endlich.

Aufgabe 14.6 (1+1 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Wir nennen zwei Elemente x, $y \in G$ zueinander konjugiert, wenn ein $g \in G$ existiert, sodass $x = gyg^{-1}$.

a) Zeigen Sie, dass Konjugation eine Äquivalenzrelation auf G definiert (zwei Elemente sind äquivalent, wenn sie zueinander konjugiert sind). Die Äquivalenzklassen heißen Konjugationsklassen von G.

b) Zeigen Sie: Sind zwei Elemente x ,$y \in G$ zueinander konjugiert, so ist $\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(y)$.

Bonusaufgabe* 14.7 (1 Punkt) Es sei G eine unendliche Gruppe, die endlich erzeugt ist. Zeigen Sie: G ist abzählbar unendlich. Gilt die Umkehrung?