

Präsenzaufgabe 13.1 Es seien $V = \mathbb{R}^2$ und U der von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum von V . Bestimmen Sie V/U . Für $v \in V$ definieren wir $[v] := v + U \in V/U$. Berechnen Sie $[3 + 3] + [-1, 1]$ in V/U .

Präsenzaufgabe 13.2 Es seien V und W zwei K -Vektorräume. Zeigen Sie, dass für alle $v \in V$, $w \in W$ gilt: $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ oder $w = 0$.

Aufgabe 13.1 (1 Punkt) Es sei V ein K -Vektorraum mit Unterräumen U und W , sodass $V = U \oplus W$. Zeigen Sie: V^* ist die direkte Summe von U^* und W^* .

Aufgabe 13.2 (2+1 Punkte) Sei V ein K -Vektorraum und seien U und W Unterräume von V .

- a) Zeigen Sie: $(U + W)/W$ ist isomorph zu $U/(U \cap W)$.
- b) Folgern Sie, dass $\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Aufgabe 13.3 (1+1+1+1 Punkte) Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Zeigen Sie, dass $K \otimes V \cong V$ ist. Zeigen Sie dazu die folgenden Aussagen:

- a) Die Abbildung $\varphi: K \times V \rightarrow V$, $(a, v) \mapsto a \cdot v$ ist bilinear.
- b) Die Abbildung φ induziert eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}: K \otimes V \rightarrow V$, $a \otimes v \mapsto a \cdot v$.
- c) Die Abbildung $\psi: V \rightarrow K \otimes V$, $v \mapsto 1 \otimes v$ ist linear.
- d) Die Abbildungen ψ und $\tilde{\varphi}$ sind zueinander invers.

Aufgabe 13.4 (2 Punkte) Es seien V und W zwei K -Vektorräume mit Basen $\{e_1, \dots, e_n\}$ und $\{b_1, \dots, b_m\}$. Zeigen Sie, dass ein Element der Form

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} e_i \otimes b_j \in V \otimes W$$

genau dann von der Form $v \otimes w$ für $v \in V$, $w \in W$ ist, wenn die Matrix (a_{ij}) Rang 1 hat.

Aufgabe 13.5 (1+1 Punkte) Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e . Zeigen Sie:

- a) Gilt $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ für alle $a, b \in G$, so ist G abelsch.
- b) Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist G abelsch.

Bonusaufgabe* 13.6 (1 Punkt) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass die Abbildung $K[x] \otimes K[y] \rightarrow K[x, y]$, $f \otimes g \mapsto fg$ wohldefiniert und ein Isomorphismus von K -Vektorräumen ist.