Präsenzaufgabe 12.1 Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Es sei $\{b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*\}$ die duale Basis von V^* . Zeigen Sie:

a) Für $\varphi \in V^*$ gilt: $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(b_i) b_i^*$.

b) Für $v \in V$ gilt: $v = \sum_{i=1}^n b_i^*(v) b_i$.

Präsenzaufgabe 12.2 Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$.

Aufgabe 12.1 (2 Punkte) Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und $\varphi \in V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$. Zeigen oder widerlegen Sie: Dann gibt es ein $y \in V$, sodass $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$ für alle $x \in V$.

Aufgabe 12.2 (1+2 Punkte) Es sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Basis $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie:

- Seien $b_i^* \in V^*$ definiert durch $b_i^*(e_j) = 2 \cdot \delta_{ij}$. Dann sind b_i^* , $i \in \mathbb{N}$, linear unabhängig.
- Die b_i^* bilden kein Erzeugendensystem von V^* .

Aufgabe 12.3 (1+1+2+1 Punkte) Es seien V und W zwei K -Vektorräume. Es seien $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $\varphi^*: W^* \rightarrow V^*$ die duale Abbildung. Zeigen oder widerlegen Sie:

- Ist φ injektiv, dann ist φ^* injektiv.
- Ist φ surjektiv, dann ist φ^* surjektiv.
- Ist φ injektiv, dann ist φ^* surjektiv.
Hinweis: Ist V ein Unterraum von W , so lässt sich jede Basis von V zu einer Basis von W ergänzen.
- Ist φ surjektiv, dann ist φ^* injektiv.

Aufgabe 12.4 (2 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Sei U ein Unterraum von V . Wir definieren $U^0 := \{f \in V^* \mid f(v) = 0 \text{ für alle } v \in U\}$. U^0 ist ein Unterraum von V^* . Zeigen Sie: $\dim V = \dim U + \dim U^0$.

Hinweis: Betrachten Sie eine Basis von U und ergänzen Sie diese zu einer Basis von V .

Bonusaufgabe* 12.5 (1 Punkt) Es sei A eine komplexe 5×5 -Matrix mit den folgenden Eigenschaften. Geben Sie alle möglichen essentiell verschiedenen (d.h. verschieden bis auf Vertauschung der Jordan-Blöcke) Jordan-Normalformen für A an. (Es genügt, wenn Sie in den Matrizen nur die Einträge ungleich 0 notieren.)

- Minimalpolynom $M_A(x) = (x - 3)^2(x - 2)$,
- $\dim \text{Ker}(A - 3\text{Id})^2 = 2$.