Ariyan Javanpeykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 11.1 Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 2x_2 - 2x_3^2 = 0\}$$

in $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation von Q.

Präsenzaufgabe 11.2 Wir betrachten die Quadrik

$$Q = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 5 = 0\}$$

in $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation von Q.

Aufgabe 11.1 (1+1+1+1 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es sei $Q\colon \langle x, A(x)\rangle + c = 0$ eine Quadrik in $\mathbb{R}^n$, wobei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix und $c \in \mathbb{R}$ ist. Dann existieren reelle Zahlen $a_1, \dots, a_k$, sodass $a_1 x_1^2 + \dots + a_k x_k^2 = 2x_{k+1}$ für ein $k < n$.

b) Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit charakteristischem Polynom $\chi_\varphi(x) = (-1)^n (x-1)^k (x+1)^{n-k}$ mit $1 < k < n$. Dann existiert ein Unterraum $U \subset V$, sodass φ die orthogonale Spiegelung an U ist.

c) Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Jeder orthogonale Endomorphismus $\varphi\colon V \to V$ ist diagonalisierbar.

d) Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine orthogonale Abbildung mit $\mathrm{Sp}(\varphi) = \det(\varphi) = -1$. Ferner sei -1 ein Eigenwert von φ. Dann ist 1 ein Eigenwert von φ.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation für die nachfolgende Quadrik Q:

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 7x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 16x_2x_3 + 20x_1x_3 + 18x_3 = 0\}.$$

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) Gegeben sei eine Ellipse E mit den Hauptachsen $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und Hauptachsenabschnitten 3 und 2. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass E durch die Gleichung

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 1$$

beschrieben wird.

Bonusaufgabe* 11.4 (1 Punkt) Es sei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix, sodass alle Eigenwerte von A positiv sind. Zeigen oder widerlegen Sie: Dann haben A und A^2 die gleichen Eigenräume.