Ariyan Javanpeykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 9.1 (Gram-Schmidt-Verfahren) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Es seien $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 1, 0)$ und $a_3 = (1, 1, 1)$. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf (a_1, a_2, a_3) an.

Präsenzaufgabe 9.2 (Adjungierte) Es sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Es seien $\varphi, \psi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

a) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

b) $(\mathrm{id})^* = \mathrm{id}$.

c) $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

d) Ist φ bijektiv, so ist $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

e) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$.

Aufgabe 9.1 (1+1,5+1,5 Punkte) Wir betrachten die nachfolgende reelle orthogonale Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir wollen den Spektralsatz für orthogonale Matrizen auf A anwenden. Dazu gehen wir wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die **komplexen** Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Wählen Sie drei komplexe Eigenvektoren v_1, v_2, v_3, sodass gilt: $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_3 = \overline{v_2}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Ortonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts. Stellen Sie die Matrix A bezüglich dieser Basis dar.

c) Wir definieren nun die **reellen** Vektoren

$$u_1 := \frac{v_2 + v_3}{\|v_2 + v_3\|} \quad \text{und} \quad u_2 := i \cdot \frac{v_2 - v_3}{\|v_2 - v_3\|}.$$

Zeigen Sie, dass $\{v_1, u_1, u_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist und stellen Sie A bezüglich dieser Basis dar.

Aufgabe 9.2 (2+2 Punkte) Wir betrachten den reellen Vektorraum V der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Vektoren $v_i = x^i \in V$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$ an, um orthonormale Vektoren b_0, b_1, b_2 zu erhalten.

b) Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi\colon V \to V, \quad f(x) \mapsto \mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x,$$

die einer Funktion f ihre Ableitung zuordnet.
Bestimmen Sie die Adjungierte von ϕ sowie von der n-fachen Ableitung ϕ^n, $n \geq 2$.

Aufgabe 9.3 (1+1+1+1+1 Punkte) Es seien V ein unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist φ normal, dann ist φ hermitesch oder unitär.

b) Ist φ hermitesch und nilpotent, so ist $\varphi = 0$.

c) $\varphi \circ \varphi^*$ ist normal.

d) Ist φ hermitesch, so ist φ bijektiv.

Bonusaufgabe* 9.4 (1 Punkt) Es sei

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & -i \\ b & c \end{pmatrix}$$

eine unitäre Matrix mit Determinante 1. Bestimmen Sie a, b und c.