Lineare Algebra und Geometrie 2 – WS 2018/2019 **Blatt 8**

Ariyan Javanpeykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 8.1 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$. Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Es ist $V = U \oplus U^\perp$, d.h. jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$. Die Abbildung $S_U \colon V \to V, v = v_1 + v_2 \mapsto v_1 - v_2$ heißt orthogonale Spiegelung von V an U.

a) Zeigen Sie: $S_U = \mathrm{id} - 2\pi_{U^\perp} = -\mathrm{id} + 2\pi_U$. Dabei bezeichnet π_U die orthogonale Projektion von V auf U.

b) Zeigen Sie: $S_U \colon V \to V$ ist eine orthonale Abbildung.

c) Es seien $V = \mathbb{R}^n$ (mit Standardskalarprodukt), $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = 1$ und $U := \langle a \rangle^\perp$. Geben Sie eine Formel für die orthogonale Spiegelung in U an.

d) Es sei $a = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^3$ und $U := \langle a \rangle^\perp$. Bestimmen Sie die Matrix der orthogonalen Spiegelgung an U (bezügliche der Standardbasis).

Präsenzaufgabe 8.2

a) Es sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die orthohonale Gruppe $O(n)$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet. Was ist das neutrale Element?

b) Wie viele verschiedene orthogonale Abbildungen (bezüglich des Standardskalarprodukts) $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt es mit $A(e_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, n-1$, wobei $\{a_i \colon i = 1, \dots, n-1\}$ ein orthonormales System in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 8.1 (1+1+1+1 Punkte) Es sei

$$V = \left\{ x = (x_n) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \ \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \right\}.$$

Dann ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit komponentenweiser Addition und der gewöhnlichen skalaren Multiplikation.

a) Zeigen Sie: Sind $x = (x_n)$ und $y = (y_n)$ in V, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ konvergent.

b) Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

c) Wir betrachten den unendlich-dimensionalen Untervektorraum U von V, der von den Vektoren

$$(-1, 1, 0, 0, \ldots), (-1, 0, 1, 0, 0, \ldots), (-1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots), \ \ldots$$

erzeugt wird. Bestimmen Sie $U^{\perp}$ und $(U^{\perp})^{\perp}$.

d) Finden Sie einen Unterraum W von V, sodass gilt:

$$(U \cap W)^{\perp} \neq U^{\perp} + W^{\perp}.$$

Aufgabe 8.2 (1,5 Punkte) Sei V der euklidische Vektorraum der stetigen Funktionen $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Sei U der Unterraum von V, dessen Elemente die geraden Funktionen sind, d.h. $f \in U$ genau dann, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.
Bestimmen Sie $U^{\perp}$.

Aufgabe 8.3 (1,5 Punkte) Es sei $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen. Es sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^3$ erzeugt von den Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(0, 1, 1)$. Bestimmen Sie die Matrix der orthogonalen Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U bezülich der Standardbasis. Ist diese Matrix orthogonal?

Aufgabe 8.4 (1+1+1+1+1 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Jede diagonalisierbare komplexe $n \times n$-Matrix A mit $\det(A) = 1$ ist eine unitäre Matrix (d.h. sie beschreibt eine unitäre Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bezüglich des Standardskalarprodukts).

b) Für jede unitäre $n \times n$-Matrix A gilt: $|\det(A)| = 1$.

c) Jede orthogonale Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, wobei n ungerade ist, besitzt einen Fixpunkt ungleich 0.

d) Ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein komplexer Eigenvektor einer reellen $n \times n$-Matrix A, so ist $\overline{v}$ ebenfalls ein Eigenvektor von A.

e) Es existiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, sodass die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Abbildung beschreibt.

Bonusaufgabe* 8.5 (1 Punkt) Gibt es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, sodass die folgende Abbildung orthogonal ist?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$