ARIYAN JAVANPEYKAR & MAXIMILIAN PREISINGER

Präsenzaufgabe 10.1 Wir betrachten eine Quadrik

$$Q = \{x = (x_1, x_2) \mid q(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 1 = 0\}$$

in $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

a) Finden Sie eine symmetrische Matrix A, sodass $q(x_1, x_2) = \langle x, A(x) \rangle - 1$.

b) Zeigen Sie, dass $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ die Eigenwerte von A sind.

c) Bestimmen Sie zugehörige Eigenvektoren v_1, v_2 von A, sodass $\{v_1, v_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ ist.

d) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, sodass

$$S^T A S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e) Substituieren Sie $x = (x_1, x_2)$ in $q(x_1, x_2)$ durch

$$S \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

um die Hauptachsentransformation von Q zu erhalten.

Aufgabe 10.1 (1+2+1 Punkte) Es sei V ein zwei-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$. Es seien a, $b \in V$. Wir definieren die lineare Abbildung $T \colon V \to V$ durch $T(x) = \langle x, a \rangle b + \langle y, b \rangle a$.

a) Zeigen Sie: T ist eine hermitesche Abbildung.

b) Es seien nun a und b orthonormal in V. Finden Sie eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von T und stellen Sie T als eine Matrix A bezüglich dieser Basis dar.
Hinweis: Berechnen Sie dazu $T(a)$ und $T(b)$.

c) Folgern Sie aus b), dass T eine unitäre Abbildung ist.

Aufgabe 10.2 (2 Punkte) Wir betrachten den unitären Vektorraum $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = \mathrm{Sp}(A \cdot B^*)$. Es sei $C \in V$ gegeben. Wir betrachten die lineare Abbildung $F(A) = A \cdot C$. Zeigen Sie, dass $F \colon V \to V$ genau dann normal ist, wenn C normal ist.

Aufgabe 10.3 (1+1 Punkte) Es sei A eine antisymmetrische reelle $n \times n$-Matrix.

a) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von A sind von der Form $i \cdot a$ für $a \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Fassen Sie A als komplexe $n \times n$-Matrix auf und benutzen Sie das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.

b) Folgern Sie, dass für n ungerade 0 ein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 10.4 (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Hauptachsentransformation für die nachfolgende Quadrik Q:

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 10 = 0\}.$$

Bonusaufgabe* 10.5 (1 Punkt) Finden Sie einen unendlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V sowie einen Endomorphismus $\varphi \colon V \to V$, sodass kein Endomorphismus $\psi \colon V \to V$ mit $\psi^* = \varphi$ existiert.