Präsenzaufgabe 7.1 Es sei V ein euklidischer Vektorraum und v, $w \in V$. Zeigen Sie:

a) Kosinussatz: Sind v, $w \neq 0$, so ist:

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\angle(v, w)).$$

Dabei definieren wir den Winkel $\varphi = \langle v, w \rangle$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, durch $\cos(\angle(v, w)) = \frac{\langle v,w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$.

b) Satz des Pythagoras: Ist $v \perp w$, so gilt: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Präsenzaufgabe 7.2 Es sei $V = \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Aufgabe 7.1 (1+1+2 Punkte) Es sei V ein euklidischer Vektorraum und v, $w \in V$. Sei $\|\cdot\|$ die vom Skalarpodukt auf V induzierte Norm.

a) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

b) Zeigen Sie: $\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\|v + w\|^2 - \frac{1}{4}\|v - w\|^2$.

c) Finden Sie ein Skalarprodukt auf $V = \mathbb{R}^2$, sodass die Vektoren $(1, 0)$ und $(1, 2)$ orthogonal sind.

Aufgabe 7.2 (2+2 Punkte) Es sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ der reelle Vektorraum der $n \times n$-Matrizen. Für A, $B \in V$ definieren wir:

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Sp}(A^T B).$$

a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Finden Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich dieser Basis.

Aufgabe 7.3 (2+2 Punkte)

a) Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Wir definieren auf V die Normabbildung $\|v\|_{\max} := \max(|v_1|, |v_2|)$. Zeigen Sie, dass kein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V existiert, sodass $\|v\|_{\max} = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, es existiert ein Skalarprodukt mit der gewünschten Eigenschaft und betrachten Sie den Vektor $(1, 1)$, um einen Widerspruch zu den Axiomen des Skalarprodukts zu finden.

b) Es sei V der Vektorraum der stetigen Funktion $[-1, 1] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

Bonusaufgabe* 7.4 (1 Punkt) Es sei A eine komplexe 6×6-Matrix mit $\dim \mathrm{Ker}(A) = 5$. Geben Sie alle möglichen essentiell verschiedenen Jordan-Normalformen für A an.