Ariyan Javan Peykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 6.1 Es seien Ω eine Menge und A, B, C Teilmengen von Ω.

a) Es seien $A = \{0, 1\}$ und $B = \emptyset$. Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ an.

b) Zeigen Sie: $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.

c) Zeigen Sie: $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ gilt genau dann, wenn $A = \emptyset$ ist.

d) Es sei $K = \mathbb{N}$. Beschreiben Sie $\bigcap_{k\in K} A_k$ und $\bigcup_{k\in K}$ für

(i) $A_k = \{k^2\}$.

(ii) $A_k = [k-1, k+1]$

(iii) $A_k = [-\frac{1}{k}, k]$.

Präsenzaufgabe 6.2 Sind A und B Mengen, so ist eine Abbildung (Schreibweise: $f\colon A \to B$) gegeben als eine Teilmenge f von $A \times B$, sodass es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, sodass (a, b) Element von f ist.

a) Es seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Wie viele Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt es?

b) Es sei B eine beliebige Menge. Wie viele Abbildungen $f\colon \emptyset \to B$ gibt es?

c) Es sei A eine beliebige Menge. Wie viele Abbildungen $f\colon A \to \emptyset$ gibt es?

Präsenzaufgabe 6.3 Geben Sie **endliche** Mengen A und B sowie eine Abbildung $f\colon A \to B$ an, sodass gilt:

a) f ist bijektiv.

b) f surjektiv, aber nicht injektiv ist.

c) f injektiv, aber nicht surjektiv ist.

d) f weder injektiv, noch surjektiv ist.

Geben Sie nun jeweils **unendliche** Mengen sowie Abbildungen mit den obigen Eigenschaften an.

Präsenzaufgabe 6.4 Es seien A und B gleichmächtige Mengen. Widerlegen Sie:

a) Jede surjektive Abbildung ist injektiv.

b) Jede injektive Abbildung ist surjektiv.

c) Sind $f, g\colon A \to A$ bijektiv, so gilt: $f \circ g = g \circ f$.

Zeigen Sie:

d) Sind A und B endlich, so gilt: Eine Abbildung $f\colon A \to B$ ist genau dann surjektiv, wenn sie injektiv ist.

e) Es sei $f\colon A \to A$. Gilt $f(f(a)) = a$ für alle $a \in A$, so ist f bijektiv und es gilt $f^{-1} = f$.

f) Die reellen Intervalle $(-1, 1)$ und $(2, 5)$ sind gleichmächtig.

Aufgabe 6.1 (1+1+1+1 Punkte)

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n = \{x \in \mathbb{R} \colon \frac{1}{2^n} \leq x < 2 + \frac{1}{2^n}\}$. Bestimmen Sie $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

b) Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch $f(x) = x^2$. Zeigen oder widerlegen Sie: $f^{-1}(\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

c) Zeigen Sie, dass das reelle Intervall $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

d) Es seien $A = \{2^{-n} \colon n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{3^n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ abzählbar ist.

Aufgabe 6.2 (1+1+2 Punkte) Es seien A und B Mengen und $f \colon A \to B$ eine Abbildung.

a) Es seien $g, h \colon B \to A$ Abbildungen, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_B = f \circ h$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A = h \circ f$ gilt. Zeigen Sie: $g = h$.

b) Es sei $g \colon B \to A$ eine Abbildung, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_B$ ist. Ist f dann surjektiv? Injektiv? Bijektiv?

c) Es seien $A = 2\mathbb{N}$ die Menge der gerade natürlichen Zahlen und $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Geben Sie eine Bijektion $f \colon A \to B$ an.

Aufgabe 6.3 (1+3 Punkte)

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Ist eine Relation transitiv und symmetrisch, so ist sie reflexiv.

b) Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Wir betrachten die Menge $X_\varphi = \{U \text{ Unterraum von } V \mid \varphi(U) \subset U\}$ der φ-invarianten Unterräume von V.

   (i) Wir schreiben $U \leq W$ für Unterräume U, W, wenn $U \subset W$ ist. Zeigen Sie, dass $\leq$ eine partielle Ordnung auf X_φ definiert.

   (ii) Sei nun $V = \mathbb{R}^2$. Finden Sie einen Endomorphismus φ, sodass X_φ genau zwei Elemente besitzt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die partielle Ordnung $\leq$ aus (i) sogar eine Totalordnung auf X_φ ist.

   (iii) Finden Sie einen Endomorphismus $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sodass die partielle Ordnung $\leq$ aus (i) keine Totalordnung auf X_φ ist.

Bonusaufgabe* 6.4 (1 Punkt) Es sei $X_n = \{1, \ldots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie: $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist abzählbar.