Ariyan Javan Peykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 5.1 Bestimmen Sie eine jordansche Normalform sowie eine zugehörige Jordan-Basis für die nachfolgende reelle Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -16 & 0 \\ -4 & 5 & 16 & 0 \\ 2 & -2 & -7 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 5.2 Es sei A eine reelle, nilpotente 6×6-Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = 3$. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen für A an. Bestimmen Sie für jeden Fall $\operatorname{Rang}(A^2)$.

Aufgabe 5.1 (4 Punkte) Betrachten Sie die nachfolgende reelle Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie eine Jordansche Normalform von A sowie die zugehörige Jordan-Basis.

Aufgabe 5.2 (1+1+1+1 Punkte)

a) Es sei A eine reelle nilpotente 4×4-Matrix mit $\mathrm{Ker}(A^4)/\mathrm{Ker}(A^3) = \langle v \rangle$, wobei $v \neq 0$ ist. Geben Sie eine Jordan-Basis sowie eine Jordan-Normalform für A an.

b) Betrachten Sie für $b \in \mathbb{R}$ die nachfolgende reelle Matrix B.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist (e_1, e_2, e_3) eine Jordan-Basis für B?

c) Es sei C eine reelle 4×4-Matrix mit den folgenden Eigenschaften:

i C ist trigonalisierbar und besitzt genau zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ und μ.

ii Es gilt: $m_a(\lambda) = 1$ und $m_g(\mu) = 2$.

Geben Sie alle möglichen essentiell verschiedenen Jordanschen Normalformen von C an.

d) Es sei D eine komplexe 6×6-Matrix. Die Eigenwerte von D seien λ, μ und ν. Es gelte $\dim(\mathrm{H}(D, \lambda)) < \dim(\mathrm{H}(D, \mu)) < \dim(\mathrm{H}(D, \nu))$. Bestimmen Sie alle möglichen essentiell verschiedenen Jordanschen Normalformen von D.

Aufgabe 5.3 (1+1+1+1 Punkte) Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Sei A eine reelle diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, die keine Diagonalmatrix ist. Dann hat A mindestens zwei verschiedene Eigenwerte.

b) Ist $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ für zwei $n \times n$-Matrizen A und B, so gilt $M_A(x) = M_B(x) \cdot M_C(x)$.

c) Ist A eine komplexe $n \times n$-Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = n - 1$, so besitzt A nur einen Eigenwert.

d) Es seien A eine komplexe 3×3-Matrix und (v_1, v_2, v_3) eine Jordan-Basis für A. Dann gilt: Ist (v_2, v_3, v_1) auch eine Jordan-Basis für A, so besitzt eine Jordansche Normalform von A mindestens zwei Jordan-Blöcke.

Bonusaufgabe* 5.4 (1 Punkt) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und A eine invertierbare, komplexe $n \times n$-Matrix, sodass A^m diagonalisierbar ist. Zeigen Sie: Dann ist A diagonalisierbar.