ARIYAN JAVAN PEYKAR & MAXIMILIAN PREISINGER

Präsenzaufgabe 4.1 Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum der Dimension n und $A\colon V \to V$ eine lineare Abbildung.
Es sei $M_A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ das Minimalpolynom von A.

a) Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1\mathrm{Id} + a_2A + \ldots + a_{k-1}A^{k-2} + A^{k-1})$ ist.

Präsenzaufgabe 4.2 Betrachten Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix.

b) Bestimmen Sie alle A-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^3$.

c) Bestimmen Sie die Haupträume von A.

d) Bestimmen Sie eine Jordannormalform für A.

Präsenzaufgabe 4.3 Bestimmen Sie alle möglichen essentiell verschiedenen (d.h. bis auf Vertauschung der Jordan-Blöcke) Jordannormalformen von 4×4-Matrizen mit nachfolgendem charakteristischen Polynom. Geben Sie weiterhin jeweils das zugehörige Minimalpolynom an.

a) $\chi_A(x) = (x+1)^2(x-1)^2$

b) $\chi_A(x) = (x-1)^4$.

Aufgabe 4.1 (2+2 Punkte) Betrachten Sie die reelle Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 7 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom M_A von A.

b) Bestimmen Sie alle reellen A-invarianten Unterräume von $\mathbb{R}^4$ mit Hilfe des Spaltungssatzes (d.h. finden Sie für jeden A-invarianten Unterrraum eine bestimmende Gleichung). Identifizieren Sie unter diesen Unterräumen alle Haupträume von A.

Aufgabe 4.2 (1+1+1+1 Punkte) Es sei V ein komplexer Vektorraum.
Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es existiert eine komplexe 10×10-Matrix A mit $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$ und $\dim \operatorname{Ker}(A^2) = 9$.

b) Ist A eine nilpotente komplexe 5×5-Matrix mit $\dim \operatorname{Ker}(A) = 2$ und $\dim \operatorname{Ker}(A^2) = 4$, so ist die Jordannnormalform von A eindeutig (bis auf Vertauschung der Jordanblöcke).

c) Es sei $A = (a_{ij})$ eine komplexe $n \times n$-Matrix, sodass für alle i gilt: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$. Dann ist 1 ein Eigenwert von A.

d) Eine komplexe $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist genau dann nilpotent, wenn entweder für alle $i \leq j$ oder für alle $i \geq j$ gilt: $a_{ij} = 0$.

Aufgabe 4.3 (1+1+1+1 Punkte) Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.
Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Es seien $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus und $P(x) \in K[x]$ ein Polynom. Ist λ ein Eigenwert von φ, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$.

b) Sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Die Abbildung $\Phi\colon K[x] \to \operatorname{End}(V)$, $P \mapsto P(\varphi)$ ist eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. (Dabei ist die K-Vektorraumstruktur auf $K[x]$ durch die gewöhnliche Addition von Abbildungen und die gewöhnliche skalare Multiplikation gegeben.)

c) Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\varphi^3 = \varphi$. Dann ist φ diagonalisierbar.

d) Ist $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $M_\varphi(x) = x^k$ für ein $k > 0$, so existiert ein $v \in V$, sodass v, $\varphi(v)$, …, $\varphi^{k-1}(v)$ linear unabhängig sind.

Bonusaufgabe* 4.4 (1 Punkt) Zeigen oder widerlegen Sie:
Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit Eigenwert $\lambda \in K$, dann existiert ein $n \geq 1$, sodass $\mathrm{H}(\varphi, \lambda) = \operatorname{Ker}((\varphi - \lambda \mathrm{id})^n)$ ist.