Präsenzaufgabe 3.1 Diagonalisierbarkeit
Berechnen Sie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der nachfolgenden Matrizen. Entscheiden Sie jeweils, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 9 & -5 \\ -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -4 \\ 3 & 8 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Präsenzaufgabe 3.2 Minimalpolynom

a) Betrachten Sie die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Berechnen Sie das Minimalpolynom von A und dem Vektor e_1.

(ii) Berechnen Sie das Minimalpolynom von A und dem Vektor $(2, 1)$.

b) Betrachten Sie die reelle Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(i) Berechnen Sie das Minimalpolynom von A und dem Vektor e_1.

(ii) Finden Sie einen Vektor v, sodass das Minimalpolynom von A und v gleich $M_{A,v}(x) = (x + 3)$ ist.

Präsenzaufgabe 3.3 Es sei K ein Körper. Betrachten Sie eine lineare Abbildung $A\colon V \to V$ für einen K-Vektorraum V. Einen Unterraum W von V nennen wir A-invariant, wenn für alle $w \in W$ auch $A(w) \in W$ ist (wir schreiben dafür kurz: $A(W) \subset W$). Es sei $P(x) \in K[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Im}(P(A))$ ist A-invariant.

b) $\mathrm{Ker}(P(A))$ ist A-invariant.

Aufgabe 3.1 (1+1+2 Punkte)

a) Berechnen Sie die algebraischen und geometrischen Multiplizitäten der nachfolgenden reellen Matrix A. Entscheiden Sie, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix mit $m_a(0) = n$ und $m_g(0) = 1$.

c) Es sei A eine reelle, diagonalisierbare $n \times n$-Matrix. Es sei S eine invertierbare Matrix, sodass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist.

(i) Zeigen Sie, dass $A^k = S^{-1}D^kS$.

(ii) Bestimmen Sie $\lim_{k\to\infty} A^k$ in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2 (2+2 Punkte)

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom M_{A,e_1} von A und e_1 für die nachfolgenden reellen Matrizen A.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) Es sei $V = \mathbb{R}^n$. Es sei $v \in V$. Dann existiert ein kleinster A-invarianter Unterraum W von V mit $v \in W$. (Dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Zeigen Sie: $\dim(W) = \deg(M_{A,v}(x))$.

Aufgabe 3.3 (1+1+2 Punkte) Es sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen. Betrachten Sie den Endomorphismus φ von V, der jeder Matrix ihre transponierte Matrix zuweist:

$$\varphi\colon V \to V, \quad \varphi(A) = A^T.$$

a) Zeigen Sie: $\varphi\colon V \to V$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

b) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von φ.

c) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenräume.

Bonusaufgabe* 3.4 (1 Punkt) Sei K ein Körper. Wir betrachten den K-Vektorraum $V_n = \{f \in K[X] \mid \deg(f) \leq n\}$ der Polynom vom Grad höchstens n, wobei n eine natürliche Zahl ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung $\varphi\colon V_n \to V_n$, die einem Polynom $f(x)$ seine Ableitung $\mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}x$ zuordnet. Bestimmen Sie auch die zugehörigen Eigenvektoren.