Ariyan Javan Peykar & Maximilian Preisinger

Präsenzaufgabe 2.1 Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der nachfolgenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und entscheiden Sie, ob diese diagonalisierbar sind.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -6 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ mit $\chi_B(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$.

c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ mit $\chi_C(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ mit $\chi_D(x) = -(x-2)^2(x+7)$.

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ mit $\chi_E(x) = -x^3$.

Präsenzaufgabe 2.2 Betrachten Sie die reelle Matrix $R_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Welche geometrische Bedeutung hat $R_{0,1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$? Begründen Sie anschaulich, wieso $R_{0,1}$ keine reellen Eigenwerte bzw EIgenvektoren besitzt.

b) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte von $R_{a,b}$ sowie die zugehörigen Eigenvektoren.

Präsenzaufgabe 2.3 Charakteristisches Polynom
Es sei A eine $n \times n$-Matrix.

a) Zeigen Sie:

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Sp}(A)x^{n-1} + \ldots + \det(A),$$

wobei $\mathrm{Sp}(A)$ die Spur von A bezeichnet.
Hinweis: Benutzen Sie die Leibniz-Formel: Für eine Matrix $A = (a_i j)$ gilt:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

b) Folgern Sie aus a): Ist $\chi_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$, so ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \mathrm{Sp}(A)$ und $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A)$.

Aufgabe 2.1 (2+2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der nachfolgenden linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und entscheiden Sie, ob diese diagonalisierbar sind.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 6 & -1 & -6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2.2 (1+3 Punkte) Betrachten Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A trigonalisierbar?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2.3 (3+1 Punkte) Es sei A die nachfolgende Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & a & b \\ -9 & 11 & c \\ -12 & d & -5 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $(1, 1, 0)$ und $(0, 1, 2)$ seien Eigenvektoren von A.

a) Bestimmen Sie a, b, c, d und die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Bonusaufgabe* 2.4 (1 Punkt) Es sei A eine komplexe 3×3-Matrix. Für A gelte: $\mathrm{Sp}(A) = 1$, $\mathrm{Sp}(A^2) = -3$ und $\mathrm{Sp}(A^3) = 4$. Berechnen Sie $\det(A)$.