DIE DELTA-INVARIANTE IN DER ARAKELOV GEOMETRIE

ROBERT WILMS

1. Motivation

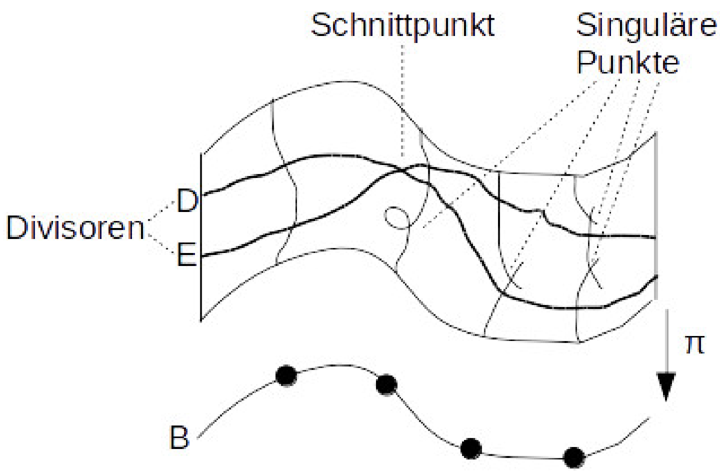
Satz (Faltings)**.** *Jede glatte, projektive Kurve C von Geschlecht $g \geq 2$ über einem Zahlkörper K hat nur endlich viele K-rationale Punkte $P \in C(K)$.*

Beispiel. *Sei $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $n \geq 5$. Dann hat $y^2 = x^n + a$ nur endlich viele Lösungen in $x, y \in \mathbb{Q}$.*

Offenes Problem: Berechne $C(K)$ explizit, beispielsweise durch eine effiziente Schranke der Höhen $h(P)$ für $P \in C(K)$. Für das analoge Problem über Funktionenkörper ist hier die Schnitttheorie sehr hilfreich.

2. Schnitttheorie

Sei B eine komplexe, projektive, glatte Kurve und C' eine glatte, projektive Kurve über $\mathbb{C}(B)$, dem Körper der rationalen Funktionen auf B. Wir assoziieren zu C' eine Faserung:



Wir haben auf der Faserung ein Schnittprodukt:

$$(D, E) = \text{Schnittpunkte} \cdot \text{Vielfachheit}.$$

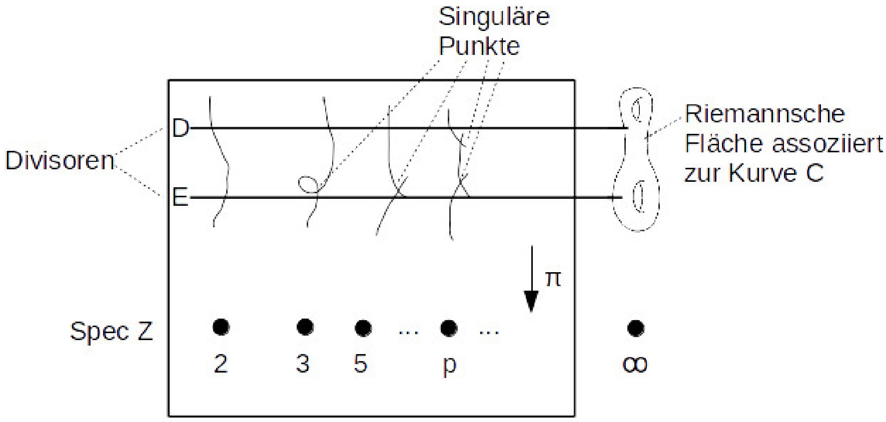
Es gibt eine kanonische (dualisierende) Divisorklasse ω. Die Noether-Formel lautet nun:

$$12 \deg \det \pi_* \omega = (\omega, \omega) + \delta.$$

Dabei bezeichnet δ die Anzahl der singulären Punkte aller Fasern.

3. Arakelov Geometrie

Sei C eine glatte, projektive Kurve von Geschlecht $g \geq 1$ über einem Zahlkörper K. Der Einfachheit halber sei $K = \mathbb{Q}$ angenommen. Wir assoziieren ein Model:



Hier erhalten wir erst eine Schnitttheorie nach hinzufügen einer Faser über ∞. Es gibt eine kanonische (dualisierende) (Arakelov-)Divisorklasse $\bar{\omega}$. Die Faltings–Nother-Formel lautet nun (bei semi-stabiler Reduktion):

$$12\widehat{\deg}\det \pi_*\bar{\omega} = (\bar{\omega}, \bar{\omega}) + \sum_{p \in \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}} \delta_p \cdot \log p + \delta'(C_\infty)$$

Dabei bezeichne δ_p die Anzahl der singulären Punkte in der Faser über p und C_∞ die Riemannsche Fläche assoziiert zu C. Für eine Riemannsche Fläche X ist die Invariante δ nun die alternative Normierung $\delta(X) = \delta'(X) + 4g \log 2\pi$. Grob gesprochen kann $\delta(X)$ als *Maß für die Entartung* von X betrachtet werden.

4. Resultate meiner Dissertation

(1) Es gilt $\delta(X) > -2g \log 2\pi^4$. Insbesondere gilt

$$(\bar{\omega}, \bar{\omega}) \leq 12\widehat{\deg}\det \pi_*\bar{\omega} + 6 \log 2\pi^2.$$

Der Term $(\bar{\omega}, \bar{\omega})$ taucht in Zusammenhang vieler arithmetischer Anwendungen auf, z.B. bei der expliziten Berechnung von $C(K)$ oder der Bogomolov-Vermutung. Der Term $\widehat{\deg}\det \pi_*\bar{\omega}$ kann dagegen in vielen Fällen besser verstanden werden, z.B. für hyper- oder superelliptische Kurven.

(2) Es gilt die folgende explizite Darstellung für δ:

$$\delta(X) = 2(g-7) \int_{\mathrm{Pic}_0(X)} \log \|\theta\| \frac{\nu^g}{g!} - 2 \int_{\Theta} \log \|\eta\| \frac{\nu^{g-1}}{g!} - 4g \log 2\pi.$$

Dabei ist $\|\theta\|$ die Norm der Riemannschen Theta-Funktion und $\|\eta\|$ grob gesprochen eine Ableitung von $\|\theta\|$. Insbesondere erhalten wir eine kanonische Definition von δ für unzerlegbare, prinzipiell polarisierte, komplexe abelsche Varietäten.

(3) Wir erhalten eine Formel für δ die insbesondere die Berechnung konkreter Werte ermöglicht. Wir betrachten für ein $a \neq 0$ und $n \geq 5$ die kompakte Riemannsche Fläche X_n assoziiert zu der Gleichung $y^2 = x^n + a$. Dann gilt näherungsweise:

n	5	6	7	8
$\delta(X_n)$	-16.7	-16.3	-24.4	-23.8

(4) Für das Schnittprodukt zweier horizontaler, generisch disjunkter Divisoren (wie in der obigen Graphik) erhalten wir folgende Abschätzung:

$$(D,E) \geq (D,E)_\infty = -\log G(D,E) > -\tfrac{1}{4g} \max\left(1, \tfrac{2g+1}{12}\right) \delta(C_\sigma) - 3g^3 \log 2.$$

Dabei ist $G(D,E)$ die Arakelov–Green Funktion auf C_∞, die den Abstand von D und E auf C_∞ misst.

(5) Das Resultat (1) kann insbesondere genutzt werden, um die Höhe von Weierstraßpunkten abzuschätzen. Ist W ein Weierstraßpunkt von C, so gilt

$$h(W) = (\bar{\omega}, W) \leq (6g^2 + 4g + 2)\widehat{\deg} \det \pi_* \bar{\omega} + 12g^4 \log 2.$$