Übungsblatt 9

Abgabe am Freitag, 23.06.2017 bis 16 Uhr

Aufgabe 9.1 (2+2 Punkte)**.** Es sie k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei X eine affine Varietät über k, $p \in X$ ein Punkt, $\mathcal{O}_{X,p}$ der zugehörige lokale Ring mit dem maximal Ideal $\mathfrak{m}_p$ und $k(p)$ der Restklassenkörper $\mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{m}_p$. Dann gilt

$$\dim \mathcal{O}_{X,p} = \dim_{k(p)}(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2).$$

(b) Es seien $P_1 = (1:0:0), P_2 = (0:1:0), P_3 = (0:0:1) \in \mathbb{P}_k^2$ und es sei $U = \mathbb{P}_k^2 \setminus \{P_1, P_2, P_3\}$. Weiter definieren wir den Morphismus $f\colon U \to \mathbb{P}_k^2$ durch

$$f(a_0 : a_1 : a_2) = (a_1 a_2 : a_0 a_2 : a_0 a_1).$$

Dann gibt es einen Morphismus $\widetilde{f}\colon \mathbb{P}_k^2 \to \mathbb{P}_k^2$ mit $\widetilde{f}|_U = f$.

Aufgabe 9.2 (2+4 Punkte)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\varphi\colon X \to Y$ ein abgeschlossener surjektiver Morphismus quasi-projektiver Varietäten über k.

(a) Zeigen Sie, dass $\dim X \geq \dim Y$ gilt.

(b) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass X und Y affin sind und dass zu jedem $f \in \mathcal{O}(X)$ ein normiertes Polynom $g \in \mathcal{O}(Y)[T]$ existiert, so dass $(\varphi^*(g))(f) = 0$. Dabei bezeichne

$$\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y)[T] \to \mathcal{O}(X)[T]$$

die Anwendung von $\varphi^*\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ auf die Koeffizienten eines Polynoms. Zeigen Sie, dass dann $\dim X = \dim Y$ gilt.

Aufgabe 9.3 (2 Punkte)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und n, d positive ganze Zahlen. Es sei $N = \binom{n+d}{n} - 1$ und $f_0, \dots, f_N \in k[X_0, \dots, X_n]$ die Monome von Grad d. Die Veronese Einbettung ist durch

$$F\colon \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^N, \quad (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (f_0(x_0, \dots, x_n) : \cdots : f_N(x_0, \dots, x_n))$$

gegeben. Wir bezeichnen ihr Bild mit $X = F(\mathbb{P}_k^n)$. Zeigen Sie, dass $F\colon \mathbb{P}_k^n \to X$ ein Isomorphismus ist.