Übungsblatt 7

Abgabe am Freitag, 09.06.2017 bis 16 Uhr

Aufgabe 7.1 (2+2+2+2+2 Punkte)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und n, m zwei positive ganze Zahlen. Wir betrachten die Abbildung

$$q\colon \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{A}_k^{m+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m, \quad ((x_0, \ldots, x_n), (y_0, \ldots, y_m)) \mapsto ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)).$$

Wir betrachten auf $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ die durch q induzierte Topologie, das heißt $U \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ sei genau dann offen, wenn $q^{-1}(U)$ offen bezüglich der Teilraumtopologie von $\mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{A}_k^{m+1} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{A}^{n+m+2}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die abgeschlossenen Mengen in $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ genau die Nullstellenmengen von (gegebenenfalls mehreren) bihomogenen Polynomen in den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ und den Variablen $y_0, \ldots, y_m$ sind. Ein Polynom in $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m$ heißt dabei bihomogen, falls es sowohl aufgefasst als Polynom in den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ als auch aufgefasst als Polynom in den Variablen $y_0, \ldots, y_m$ homogen ist.

(b) Es sei $N = (n+1)(m+1) - 1$ und für die Koordinaten von $\mathbb{P}_k^N$ schreiben wir

$$(z_{0,0} : z_{0,1} : \cdots : z_{0,m} : z_{1,0} : \cdots : z_{1,m} : z_{2,0} : \cdots : z_{n,m}).$$

Wir betrachten die *Segre Einbettung*, welche durch

$$f\colon \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m \to \mathbb{P}_k^N, \quad ((x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m)) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : \cdots : x_0y_m : x_1y_0 : \cdots : x_ny_m)$$

gegeben ist. Zeigen Sie, dass das Bild $X = f(\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m)$ in $\mathbb{P}_k^N$ abgeschlossen ist und geben Sie die entsprechenden homogenen Polynome an, die genau X als Nullstellenmenge haben.

(c) Zeigen Sie, dass die Segre Einbettung f injektiv ist.

(d) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^m$ genau dann abgeschlossen ist, wenn das Bild $f(V) \subseteq X$ bezüglich der Teilraumtopologie von $X \subseteq \mathbb{P}_k^N$ abgeschlossen ist.

(e) Es sei $\Delta(\mathbb{P}_k^n) = \{((x_0 : \cdots : x_n), (x_0 : \cdots : x_n)) \in \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n\} \subseteq \mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$ die Diagonale von $\mathbb{P}_k^n$ in $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$. Zeigen Sie, dass $\Delta(\mathbb{P}_k^n)$ in $\mathbb{P}_k^n \times \mathbb{P}_k^n$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 7.2 (1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Für ganze positive Zahlen n, m gilt stets $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(n,m)\mathbb{Z}$.

(b) Es gilt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.