Übungsblatt 6

Abgabe am Freitag, 02.06.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 6.1 (1+1+1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper und X und Y stets affine Varietäten über k. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es gibt einen surjektiven Morphismus $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$.

(b) Ein bijektiver Morphismus $f\colon X \to Y$ ist immer auch ein Isomorphismus.

(c) Das Bild eines Morphismus $f\colon X \to Y$ ist eine quasi-affine Varietät.

(d) Es seien X und Y irreduzibel und $f\colon X \to Y$ ein Morphismus. Der induzierte Homomorphismus von k-Algebren $f^*\colon A(Y) \to A(X)$ ist genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

(e) Es sei $U \subseteq \mathbb{A}^1_k$ eine nicht-leere offene Menge, so dass abstrakt ein Isomorphismus $U \cong \mathbb{A}^1_k$ quasi-affiner Varietäten existiert. Dann gilt bereits $U = \mathbb{A}^1_k$.

(f) Nun seien X und Y zudem zusammenhängend und ihre irreduzible Komponenten haben alle die Dimension 1. Es sei weiter $f\colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus. Dann sind die Fasern $f^{-1}(y)$ für alle Punkte $y \in Y$ endlich.

Aufgabe 6.2 (2+2 Punkte)**.** Es sei k stets ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Jede nicht-leere offene Menge in $\mathbb{A}^1_k$ ist als quasi-affine Varietät isomorph zu einer abgeschlossenen Menge in $\mathbb{A}^2_k$.

(b) Jede quasi-affine Varietät über k ist isomorph zu einer affinen Varietät über k.

Aufgabe 6.3 (2 Punkte)**.** Es sei A eine endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-Algebra, die zugleich ein Körper ist. Zeigen Sie, dass A endlich ist.