Übungsblatt 5

Abgabe am Freitag, 26.05.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 5.1 (1+1+1+1 Punkte). Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei X ein topologischer Raum in dem jeder Punkt $\{x\} \subseteq X$ abgeschlossen und nicht offen ist. Der Raum X ist genau dann irreduzibel, wenn $X \setminus Y$ für eine beliebige endliche Teilmenge $Y \subseteq X$ irreduzibel ist.

(b) Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die nicht offen ist. Der Raum X ist genau dann irreduzibel, wenn $X \setminus Y$ irreduzibel ist.

(c) Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, das heißt für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ ist auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Wenn X irreduzibel und f surjektiv ist, so ist auch Y irreduzibel.

(d) Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige Bijektion. Ist Y irreduzibel, so ist auch X irreduzibel.

Aufgabe 5.2 (1+1 Punkte). Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie die Primideale zu den irreduziblen Komponenten der folgenden Varietäten in $\mathbb{A}^3_k$. Beschreiben Sie weiter die irreduziblen Komponenten geometrisch.

(a) $Z(X_1^2 - X_2X_3, X_1 - X_1X_3)$

(b) $Z(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2, X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + 1)$

Aufgabe 5.3 (1 Punkt). Es sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $q\colon \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie, dass q eine offene Abbildung ist, das heißt für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist auch $q(U) \subseteq \mathbb{P}^n$ offen, und dass $q^{-1}(P)$ für alle $P \in \mathbb{P}^n$ irreduzibel ist. (Mit der zweiten punktlosen Aufgabe weiter unten folgt dann, dass $\mathbb{P}^n$ irreduzibel ist.)

Aufgabe 5.4 (1+1+1+1+1 Punkte). Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ und $J \subseteq R$ zwei Ideale. Der Idealquotient $I : J$ ist wie folgt definiert:

$$I : J = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}.$$

Dieser ist wiederum ein Ideal.

(a) Zeigen Sie, dass stets $I : (J + K) = (I : J) \cap (I : K)$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Falls R ein Integritätsring ist, so gilt $I : (r) = \frac{1}{r}(I \cap (r))$ für jedes Hauptideal $(r) \subseteq R$.

(c) Zeigen Sie, dass stets

$$\sqrt{I} : J = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq R \text{ Primideal} \\ I \subseteq \mathfrak{p},\, J \not\subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}$$

gilt.

(d) Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X, Y \subseteq \mathbb{A}_k^n$, wobei Y Zariski abgeschlossen sei. Zeigen Sie, dass stets $I(X) : I(Y) = I(X \setminus Y)$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass stets $Z\left(\bigcup_{n\geq 1}(I : J^n)\right) = \overline{Z(I) \setminus Z(J)}$ gilt, wobei $\overline{Z(I) \setminus Z(J)}$ den Zariski Abschluss von $Z(I) \setminus Z(J)$ bezeichne.

Aufgabe. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimmen Sie die Primideale zu den irreduziblen Komponenten der folgenden Varietäten in $\mathbb{A}_k^3$. Beschreiben Sie weiter die irreduziblen Komponenten geometrisch.

(a) $Z(X_2^2 - X_1X_3, X_3^2 - X_1^2X_2)$

(b) $Z(X_1^2 - X_2X_3, X_1^3 - X_2^3)$

Aufgabe. Es seien X, Y topologische Räume. Eine (nicht notwendig stetige) Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt offen, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ auch $f(U) \subseteq Y$ offen ist.

(a) Es sei $f\colon X \to Y$ offen und $Z \subseteq Y$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann auch $f|_{f^{-1}(Z)}\colon f^{-1}(Z) \to Z$ offen bezüglich der Teilraumtopologie auf $f^{-1}(Z) \subseteq X$ und $Z \subseteq Y$ ist.

(b) Es sei $f\colon X \to Y$ stetig und offen und für jeden Punkt $y \in Y$ sei $f^{-1}(y)$ irreduzibel bezüglich der Teilraumtopologie $f^{-1}(y) \subseteq X$. Zeigen Sie: Falls Y irreduzibel ist, so ist auch X irreduzibel.