Übungsblatt 4

Abgabe am Freitag, 19.05.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 4.1 (1+1+1+1 Punkte). (a) Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und

$$Y = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}^3 \mid t \in k\}.$$

Bestimmen Sie Erzeuger für das Ideal $I(Y) \subseteq k[X_1, X_2, X_3]$.

(b) Es sei $Y = \{(x, e^x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie Erzeuger für das Ideal $I(Y) \subseteq \mathbb{R}[X_1, X_2]$.

(c) Es sei $Y = \{(x, \sin(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie Erzeuger für das Ideal $I(Y) \subseteq \mathbb{R}[X_1, X_2]$.

(d) Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\mathbb{F}_q \subseteq k$ der endliche Körper der Ordnung $q = p^r$. Weiter sei $Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in k^n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}_q\}$. Bestimmen Sie Erzeuger für das Ideal $I(Y)$.

Aufgabe 4.2 (1+1 Punkte). Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Es sei $Y_1 = Z(X_2 - X_1^2) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Zeigen Sie $A(Y_1) \cong k[X]$.

(b) Es sei $Y_2 = Z(X_1X_2 - 1) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Zeigen Sie $A(Y_2) \ncong k[X]$.

Aufgabe 4.3 (2 Punkte). Es sei k ein algebraischer abgeschlossener Körper und B eine k-Algebra. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $B \cong A(Y)$.

(ii) Die k-Algebra B ist endlich erzeugt und besitzt keine nilpotenten Elemente.

Aufgabe 4.4 (2+2 Punkte). Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ein topologischer Raum ist genau dann noethersch, wenn die Menge seiner offenen Teilmengen die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.

(b) Eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ versehen mit der Teilraumtopologie ist genau dann hausdorffsch, wenn Y endlich ist. (Ein topologischer Raum X heißt hausdorffsch, wenn zu zwei beliebigen Punkten $p_1, p_2 \in X$ mit $p_1 \neq p_2$ stets zwei offene Mengen $p_1 \in U_1$ und $p_2 \in U_2$ existieren mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.)

Aufgabe. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{A}^2 \mid x \in \mathbb{A}^1\} \subseteq \mathbb{A}^2$ abgeschlossen bezüglich der Zariski Topologie ist, aber nicht abgeschlossen bezüglich der Produkttopologie ist.

Aufgabe. Zeigen Sie, dass jeder noethersche topologische Raum Y kompakt ist, das heißt, jede Überdeckung von $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ durch offene Teilmengen U_i besitzt bereits eine endliche Teilüberdeckung $Y = \bigcup_{i \in I_0} U_i$ mit $I_0 \subseteq I$ und $\#I_0 < \infty$.

Aufgabe. Es sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$ nicht nilpotent. Zeigen Sie:

$$R\left[\frac{1}{a}\right] \cong R[X]/(aX-1).$$

Aufgabe. Es sei $f \in k[X_1, X_2]$ ein irreduzibles Polynom mit $\deg f = 2$ und $Y_3 = Z(f)$. Zeigen Sie, dass $A(Y_3) \cong A(Y_1)$ oder $A(Y_3) \cong A(Y_2)$ gilt, wobei Y_1 und Y_2 wie in Aufgabe 4.2 definiert seien.