Übungsblatt 3

Abgabe am Montag, 15.05.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 3.1 (1+1+1+1+1+1 Punkte). Es sei $\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms X^2+X+1. Die Eisenstein-Zahlen sind die komplexen Zahlen der Form $a + b\rho$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}[\rho] = \{a + b\rho \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$ und die Normabbildung

$$N\colon \mathbb{Z}[\rho] \to \mathbb{Z}, \quad a + b\rho \mapsto |a + b\rho|^2 = a^2 - ab + b^2$$

ist multiplikativ.

(b) Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\rho]^*$ ist zyklisch von der Ordnung 6 und wird von ρ erzeugt.

(c) Der Ring $\mathbb{Z}[\rho]$ ist ein Hauptidealring.

(d) Jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[\rho]$.

(e) Jede Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ lässt sich als Produkt $p = \pi\overline{\pi}$ für ein $\pi \in \mathbb{Z}[\rho]$ schreiben.

(f) Jede Prinzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $p \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ lässt sich in der Form $p = x^2 + 3y^2$ für eindeutige $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ darstellen.

Aufgabe 3.2 (1+1+1+1+1+1 Punkte). Im Folgenden betrachten wir den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a+b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

(a) Die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$ von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist $\{-1, 1\}$.

(b) Die Elemente $3, 7, 4 + \sqrt{-5}, 1 + 2\sqrt{-5}$ sind alle irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(c) Die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \quad a + b\sqrt{-5} \mapsto (a + 3b \bmod 7)$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(d) Der Kern von ψ ist das Ideal $(7, 4 + \sqrt{-5})$, welches kein Hauptideal ist.

(e) Das Ideal $(21) \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ besitzt in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ die folgende Zerlegung in Primideale:

$$(21) = (3, 1 + \sqrt{-5}) \cdot (3, 1 - \sqrt{-5}) \cdot (7, 4 + \sqrt{-5}) \cdot (7, 4 - \sqrt{-5}).$$

(f) Jedes Produkt zweier Primideale aus der obigen Zerlegung von (21) ist ein Hauptideal.

Aufgabe. Im Folgenden betrachten wir den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist ein Unterring von Index 2 des Ringes $\mathbb{Z}[\rho]$ aus Aufgabe 3.1.

(b) Jedes Ideal in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist von der Form $x\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ oder $x\mathbb{Z}[\rho]$ für ein $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(c) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist ein Hauptidealring.