Übungsblatt 2

Abgabe am Freitag, 05.05.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

Aufgabe 2.1 (1+1+1 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei R ein noetherscher Ring und $R' \subseteq R$ ein Unterring. Dann ist auch R' noethersch.

(b) Es sei R ein Hauptidealring und $R' \subseteq R$ ein Unterring. Dann ist auch R' ein Hauptidealring.

(c) Der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 4)$ ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 2.2 (1+1+1 Punkte)**.** Es sei R ein Ring und $\phi\colon R[X] \to \mathrm{Abb}(R, R)$ die Abbildung die jedes Polynom f auf die Abbildung $r \mapsto f(r)$ in $\mathrm{Abb}(R, R)$ schickt. Beweisen Sie:

(a) Die Abbildung ϕ ist genau dann ein Ringhomomorphismus, wenn R kommutativ ist.

(b) Die Abbildung ϕ ist injektiv, aber nicht surjektiv, wenn R unendlich ist.

(c) Die Abbildung ϕ ist surjektiv, aber nicht injektiv, wenn R endlich ist.

Aufgabe 2.3 (1+1 Punkte)**.** Es sei R ein kommutativer Ring. Wir nennen R zusammenhängend, wenn das Polynom $X^2 - X$ genau zwei Nullstellen besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann zusammenhängend ist, wenn R nicht der Nullring ist und keine Ringe $R_1 \neq 0$ und $R_2 \neq 0$ mit $R \cong R_1 \times R_2$ existieren.

(b) Nun sei R zusammenhängend und $I, J \subseteq R$ seien zwei Ideale mit $I \cdot J = 0$ und $I + J = R$. Beweisen Sie, dass dann bereits $I = R$ und $J = 0$ oder $I = 0$ und $J = R$ gilt.

Aufgabe 2.4 (2 Punkte)**.** Es sei F ein endlicher Körper. Wir nennen $a \in F^*$ eine Primitivwurzel, falls a die Gruppe F^* erzeugt. Zeigen Sie: Ist das Produkt aller Primitivwurzeln ungleich 1, so ist F isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.5 (1+1 Punkte)**.** Wir definieren auf der additiven Gruppe $R = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Produkt durch

$$(a_1, \overline{b_1}) \cdot (a_2, \overline{b_2}) := (a_1a_2, \overline{a_1b_2 + a_2b_1}).$$

(a) Zeigen Sie, dass R dadurch zu einem kommutativen Ring isomorph zu $\mathbb{Z}[X]/(5X, X^2)$ wird.

(b) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe R^* eine zyklische Gruppe der Ordnung 10 ist.

Aufgabe. Es sei R stets ein kommutativer Ring und $I, J \subseteq R$ zwei Ideale mit $I + J = R$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für jedes Paar positiver ganzer Zahlen m, n gilt $I^m + J^n = R$.

(b) Ist $I \cdot J = K^n$ für ein Ideal $K \subseteq R$ und ein $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, so gibt es Ideale $I_0, J_0 \subseteq R$ mit $I = I_0^n$ und $J = J_0^n$.

(c) Es sei nun speziell $R = \mathbb{Z}[X]$, $I = (2, X)$ und $J = (3, X)$. Dann ist $\{i \cdot j \mid i \in I \text{ und } j \in J\}$ bereits ein Ideal.

Aufgabe. Im Folgenden sei K stets ein Körper. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Der Polynomring $K[X, Y]$ ist ein Hauptidealring.

(b) Der Ring der Laurentpolynome $K[X, X^{-1}]$ ist ein Hauptidealring.

(c) Der Ring der Potenzreihen $K[[X]]$ ist ein Hauptidealring.

(d) Das Produkt $R = R_1 \times \cdots \times R_n$ von Hauptidealringen R_j ist wiederum ein Hauptidealring.

Aufgabe. Es sei $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ die Divisionsalgebra der Quarternionen. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$ unendlich viele verschiedene Nullstellen hat.

Aufgabe. Es sei R ein kommutativer Ring und $U \subseteq R^*$ eine endliche Teilmenge. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $f \in R[X]$ gibt, so dass $f(u) = u^{-1}$ für alle $u \in U$ gilt.

Aufgabe. (a) Zeigen Sie, dass für eine Primzahl $p \equiv 3 \bmod 4$ der Ring $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ ein Körper mit p^2 Elementen ist.

(b) Zeigen Sie, dass für eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ der Ring $\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i]$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist.

(c) Welche Form hat der Ring $\mathbb{Z}[i]/2\mathbb{Z}[i]$?

Aufgabe. (a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $X^2 + 4 = Y^3$.

(b) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $X^2 + 1 = Y^5$.