Übungsblatt 12

Abgabe am Freitag, 14.07.2017 bis 16 Uhr

Aufgabe 12.1 (1+1+1+1 Punkte). Es sei im Folgenden R stets ein noetherscher kommutativer Ring. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $a \in R$ nilpotent und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler des Hauptideals (a), so gilt $h(\mathfrak{p}) = 0$.

(b) Ist $a \in R$ ein Nullteiler und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler des Hauptideals (a), so gilt $h(\mathfrak{p}) = 0$.

(c) Ist R zu dem reduziert, $a \in R$ ein Nullteiler und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler des Hauptideals (a), so gilt $h(\mathfrak{p}) = 0$.

(d) Ist R zu dem reduziert, $a_1, a_2 \in R$ zwei Nullteiler und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler des Ideals (a_1, a_2), so gilt $h(\mathfrak{p}) = 0$.

Aufgabe 12.2 (2+2+2+2 Punkte). Es sei im Folgenden R stets ein noetherscher kommutativer Ring. Wir nennen eine Kette von Primidealen $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ *maximal*, falls $\mathfrak{p}_0$ ein minimales Primideal ist, $\mathfrak{p}_n$ ein maximales Primideal ist und für alle $0 \leq j < n$ kein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{j+1}$ existiert. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Alle maximalen Ketten von Primidealen in R haben die gleiche Länge.

(b) Ist R zu dem lokal, so haben alle maximalen Ketten von Primidealen in R die gleiche Länge.

(c) Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine maximale Kette von Primidealen mit $n = \dim R$. Dann existiert eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ von Elementen aus R, so dass $\mathfrak{p}_j$ ein minimaler Primteiler des Ideals $(a_1, \ldots, a_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ ist.

(d) Ist $I = (a_1, \ldots, a_m) \subsetneq R$ ein Ideal und $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von I, so gilt $h(\mathfrak{p}) \leq m + h(\mathfrak{p}/I)$.