Übungsblatt 11

Abgabe am Freitag, 07.07.2017 bis 16 Uhr

Aufgabe 11.1 (2+3+1 Punkte)**.** Es sei im Folgenden R stets ein noetherscher kommutativer Ring.

(a) Es sei M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal, das in jedem Maximalideal von R enthalten ist. Zeigen Sie, dass aus $\mathfrak{a}M = M$ bereits $M = 0$ folgt.

(b) Sei R nun zusätzlich lokal und regulär. Zeigen Sie, dass R dann auch ein Integritätsbereich ist.

(c) Nun sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $Y \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge, die glatt ist. Zeigen Sie, dass Y bereits irreduzibel ist.

Aufgabe 11.2 (1+1 Punkte)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, A eine endlich erzeugte k-Algebra und $\mathfrak{m} \subseteq A$ ein maximales Ideal.

(a) Es sei $D \in \mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m})$ eine Derivation. Zeigen Sie, dass $D|_{\mathfrak{m}^2} = 0$ gilt und dass D eine Abbildung $\overline{D}\colon A/\mathfrak{m}^2 \to k$ induziert.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{Der}_k(A, A/\mathfrak{m}) \to \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k), \quad D \mapsto \overline{D}|_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2}$$

ein Isomorphismus von A-Moduln ist.

Aufgabe 11.3 (1+1+1 Punkte)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(a) Berechnen Sie die Menge der singulären Punkte von $Z(x^3y + y^3z + z^3x) \subseteq \mathbb{P}_k^2$.

(b) Bestimmen Sie die $\lambda \in k$, für die $\{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 \mid y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \subseteq \mathbb{A}_k^2$ nicht glatt ist.

(c) Es sei nun $\mathrm{char}\, k \notin \{2, 3\}$ und $A, B \in k$. Zeigen Sie, dass $\{(x, y) \in \mathbb{A}_k^2 \mid y^2 = x^3 + Ax + B\}$ genau dann glatt ist, wenn $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 11.4 (1 Punkt)**.** Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine irreduzible quasi-projektive Varietät. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{P \in X \mid \mathcal{O}_{X,P} \text{ ist regulär}\} \subseteq X$ offen in X ist.