

# Übungsblatt 1

Abgabe am Freitag, 28.04.2017 bis 16 Uhr

Von den folgenden Aufgaben sind die Aufgaben mit angegebener Punktzahl für die Abgabe und Korrektur vorgesehen. Die restlichen Aufgaben sollen Ihnen die Möglichkeit geben, den Stoff darüber hinaus zu üben.

**Aufgabe 1.1** (1+1+1+1 Punkte). Es sei im Folgenden  $R$  stets ein kommutative Ring. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Gilt für  $x, y, z \in R$  die Gleichung  $xy = zx = 1$ , so folgt  $y = z$ .
- (b) Es gilt  $R^* = R[X]^*$ .
- (c) Falls  $R$  ein Integritätsring ist, gilt  $R^* = R[X]^*$ .
- (d) Falls  $R$  ein endlicher Ring ist, so ist jedes  $r \in R \setminus \{0\}$  eine Einheit oder ein Nullteiler.

**Aufgabe 1.2** (1+1 Punkte). Es sei  $R$  ein kommutative Ring.

- (a) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Ringhomomorphismus  $\theta: \mathbb{Z} \rightarrow R$  gibt.
- (b) Der nicht-negative Erzeuger des Ideals  $\ker \theta \subseteq \mathbb{Z}$  wird die Charakteristik von  $R$  genannt. Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines Integritätsringes entweder eine Primzahl oder 0 ist. Was ist die Charakteristik des Null-Rings?

**Aufgabe 1.3** (1+1+1 Punkte). Es sei  $V = \text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{R})$  der reelle Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{N}_0$  und  $R = \text{End}(V)$  der Ring der Endomorphismen von  $V$ . Wir definieren die folgenden Elemente  $s, t, u \in R$  durch

$$s(f)(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ f(n-1) & \text{falls } n \geq 1, \end{cases}$$
$$t(f)(n) = f(n+1) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$
$$u(f)(n) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } n = 0, \\ 0 & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $st \neq 1$  und  $ts = 1$  in  $R$  gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass  $us = 0$  und  $tu = 0$  in  $R$  gilt.
- (c) Folgern Sie, dass  $s$  in  $R$  ein Rechtsnullteiler aber kein Linksnulleiter und  $t$  in  $R$  ein Linksnulleiter aber kein Rechtsnullteiler ist.

**Aufgabe 1.4** (1+1+1 Punkte). Es sei  $f: R_1 \rightarrow R_2$  ein Ringhomomorphismus.

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  einen Gruppenhomomorphismus  $g = f|_{R_1^*}: R_1^* \rightarrow R_2^*$  auf den Einheitengruppen induziert.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls  $f$  surjektiv ist, so ist auch  $g$  surjektiv.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls  $g$  surjektiv ist, so ist auch  $f$  surjektiv.

**Aufgabe.** Gegeben sei die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad f \mapsto (f(0) \bmod 3).$$

(a) Zeigen Sie, dass  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus ist.

(b) Zeigen Sie, dass  $\ker \varphi = (3, X)$ .

(c) Zeigen Sie, dass  $(3, X)$  kein Hauptideal ist.

**Aufgabe.** Zeigen Sie, dass die Quaternionen  $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$  eine Divisionsalgebra bilden.

**Aufgabe.** Es sei  $R$  ein Ring. Zeigen Sie, dass die binomische Formel

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \forall a, b \in R, n > 0$$

genau dann gilt, wenn  $R$  kommutativ ist.

**Aufgabe.** Es sei  $R$  ein Ring und  $R' \subseteq R$  ein Unterring. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist  $R$  ein Körper, so ist auch  $R'$  ein Körper.

(b) Ist  $R$  ein Integritätsring, so ist auch  $R'$  ein Integritätsring.

(c) Ist  $R'$  ein Integritätsring, so ist auch  $R$  ein Integritätsring.

**Aufgabe.** Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Einheitsgruppe  $R^* = \{1\}$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $R$  die Charakteristik  $\text{Char} R = 2$  hat.

(b) Zeigen Sie, dass  $f: R \rightarrow R, x \mapsto x^2$  ein Ringhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung  $f$  in (b) injektiv ist.

(d) Geben Sie ein Beispiel, in dem die Abbildung  $f$  in (b) nicht surjektiv ist.

**Aufgabe.** Ein Boolescher Ring ist ein Ring  $R$ , in dem  $x = x^2$  für alle  $x \in R$  gilt.

(a) Zeigen Sie, dass  $R$  kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass  $R$  entweder der Null-Ring ist, oder dass  $R$  die Charakteristik  $\text{Char} R = 2$  hat.

(c) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{F}_2$  der einzige Boolesche Ring ist, der zugleich ein Körper ist.

**Aufgabe.** Es sei  $R$  ein Ring und  $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, a, b, d \in R \right\} \subseteq \text{Mat}_2(R)$ . Zeigen Sie:

- (a) Die Teilmenge  $T \subseteq \text{Mat}_2(R)$  ist bereits ein Unterring von  $\text{Mat}_2(R)$ .
- (b) Falls  $R \neq 0$  gilt, so ist  $T$  nicht kommutativ.
- (c) Es gilt:  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in T^* \Leftrightarrow a \in R^*, d \in R^*$ .
- (d) Die Einheitengruppe  $T^*$  ist genau dann abelsch, wenn  $R^* = \{1\}$  gilt.