Der Krullsche Hauptidealsatz

Robert Wilms

Inhaltsverzeichnis

Es sei R stets ein noetherscher kommutativer Ring und k immer ein algebraisch abgeschlossener Körper.

1 Der Krullsche Hauptidealsatz

Wir erinnern zunächst an die folgenden Definitionen:

Definition 1.1. *Es sei $I \subsetneq R$ ein Ideal.*

(a) Ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq I$ heißt Primteiler von I.

(b) Ein Primideal $\mathfrak{p} \supseteq I$ mit $\mathfrak{p}' \not\supseteq I$ für alle Primideale $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$ heißt minimaler Primteiler von I.

(c) Die Höhe eines Primideals $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist durch

$$h(\mathfrak{p}) = \sup\{n \mid \exists(\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}),\ \mathfrak{p}_j \text{ Primideal}\}$$

definiert.

(d) Die Höhe von I ist durch

$$h(I) = \inf\{h(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ minimaler Primteiler von } I\}$$

definiert.

(e) *Das Ideal I heißt primär, falls für alle $a, b \in R$ mit $a \cdot b \in I$ und $b \notin I$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a^n \in I$ gilt.*

(f) *Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal, so heißt I $\mathfrak{p}$-primär, falls I primär ist und $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ gilt.*

Ziel dieses Abschnittes ist es den folgenden Satz von Krull über die Höhe von minimalen Primteilern von Hauptidealen zu zeigen.

Satz 1.2 (Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Es sei $a \in R \setminus R^*$ eine Nichteinheit in R und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler von (a).*

(a) *Es gilt $h(\mathfrak{p}) \leq 1$.*

(b) *Ist a kein Nullteiler, so gilt $h(\mathfrak{p}) = 1$.*

Bevor wir den Satz beweisen, möchten wir bemerken, dass die zweite Aussage unter Benutzung des folgenden Lemmas aus der ersten Aussage folgt.

Lemma 1.3. *Ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $h(\mathfrak{p}) = 0$ besteht nur aus Nullteilern.*

Beweis. Die Primideale der Höhe 0 sind gerade die minimalen Primideale. Aus [Looijenga, Proposition-Definition 2.15] wissen wir, dass es nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ gibt und dass $\bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j = \sqrt{(0)}$ gilt. Es sei $r \in \mathfrak{p}_k$. Wir müssen zeigen, dass r ein Nullteiler ist. Es lässt sich ein $t \in \bigcap_{j \neq k} \mathfrak{p}_j$ mit $t \notin \mathfrak{p}_k$ wählen. Nun ist aber $r \cdot t \in \bigcap_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j = \sqrt{(0)}$. Folglich gibt es ein $\rho \in \mathbb{N}$ mit $(r \cdot t)^\rho = 0$. Wegen $t \notin \mathfrak{p}_j$ gilt $t^\rho \neq 0$. Daher gibt es ein $\sigma \in \mathbb{N}$ mit $r^\sigma \cdot t^\rho \neq 0$ und $r^{\sigma+1} \cdot t^\rho = 0$. Das bedeutet aber, dass r ein Nullteiler ist. □

Für den Beweis des Satzes von Krull ist es hilfreich zuvor die symbolischen Potenzen zu definieren.

Definition 1.4. *Ist $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal und $\varphi\colon R \to R_{\mathfrak{q}}$ der kanonischer Homomorphismus in die Lokalisierung in $\mathfrak{p}$, so definieren wir die i-te symbolische Potenz von $\mathfrak{p}$ als $\mathfrak{p}^{(i)} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p}^i R_{\mathfrak{p}})$.*

Nun können wir den Satz von Krull beweisen.

Beweis von Satz 1.2. Wegen Lemma 1.3 genügt es (a) zu zeigen. Durch Übergang zur Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ mit dem Hauptideal $aR_{\mathfrak{p}}$ und seinem minimalen Primteiler $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ können wir annehmen, dass R lokal ist und dass das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq R$ minimaler Primteiler von (a) ist. Es genügt zu zeigen, dass jedes weitere Primideal $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{m}$ die Höhe $h(\mathfrak{q}) = 0$ hat.

Wir zeigen zunächst, dass die Folge

$$(a) + \mathfrak{q}^{(1)} \supseteq (a) + \mathfrak{q}^{(2)} \supseteq (a) + \mathfrak{q}^{(3)} \supseteq \ldots \tag{1.1}$$

stationär wird. Da $\mathfrak{m}/(a)$ in $R/(a)$ das einzige Primideal ist, gilt $\mathfrak{m}/a = \sqrt{(0)}$ in $R/(a)$. Da es zu dem endlich erzeugt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}^n/(a) = 0$. Jede Idealkette

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ in $R/(a)$ induziert gewiss eine stationäre Idealkette $I_1/\mathfrak{m} \supseteq I_2/\mathfrak{m} \supseteq \dots$ im Körper $R/\mathfrak{m}$ und ebenso stationäre Modulketten $\mathfrak{m}^s I_1/\mathfrak{m}^{s+1} \supseteq \mathfrak{m}^s I_2/\mathfrak{m}^{s+1} \supseteq \dots$ für $s \leq n$ in dem endlich dimensionalen $R/\mathfrak{m}$-Vektorraum $\mathfrak{m}^s/\mathfrak{m}^{s+1}$. Da wir für jedes Ideal $I \subseteq R$ einen Gruppenisomorphismus $I \cong \bigoplus_{s=0}^{n-1} \mathfrak{m}^s I/\mathfrak{m}^{s+1}$ haben, folgt auch insgesamt, dass $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ stationär wird. Da die Ideale in der Folge (1.1) allesamt (a) enthalten und in $R/(a)$ stationär wird, wird auch (1.1) stationär. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(a) + \mathfrak{q}^{(n)} = (a) + \mathfrak{q}^{(n+1)}$.

Als Nächstes möchten wir zeigen, dass auch $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$ gilt. Wir können jedes $q \in \mathfrak{q}^{(n)}$ in der Form $q = r \cdot a + q'$ mit $r \in R$ und $q' \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ schreiben. Daher folgt $r \cdot a \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Wegen $a \notin \mathfrak{q}$, ist $\frac{a}{1}$ in $R_\mathfrak{q}$ eine Einheit. Daher gilt $\frac{r}{1} = \frac{ra}{a} \in \mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q}$. Damit liegt auch r in $\mathfrak{q}^{(n)}$. Daher gilt die Gleichheit $\mathfrak{q}^{(n)} = a \cdot \mathfrak{q}^{(n)} + \mathfrak{q}^{(n+1)}$. Da aber a im einzigen Maximalideal von R liegt können wir Modulo $\mathfrak{q}^{(n+1)}$ das Lemma von Nakayama anwenden (siehe Aufgabe 11.1 a)) und erhalten $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$.

Damit gilt auch $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{n+1} R_\mathfrak{q}$ und eine erneute Anwendung des Lemma von Nakayama ergibt $\mathfrak{q}^n R_\mathfrak{q} = (0)$. Das heißt, das Maximalideal von $R_\mathfrak{q}$ ist nilpotent und somit zugleich ein minimales Ideal. Daher gilt $h(\mathfrak{q}) = 0$. □

Um ein besseres Verständnis für die symbolischen Potenzen zu erlangen, zeigen wir noch folgende Proposition.

Proposition 1.5. *Es sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein Primideal.*

(a) Es gilt $\mathfrak{p}^{(i)} = \{r \in R \mid \exists s \notin \mathfrak{p}\colon\ r \cdot s \in \mathfrak{p}^i\}$. Insbesondere ist $\mathfrak{p}^i \subseteq \mathfrak{p}^{(i)}$.

(b) Das Ideal $\mathfrak{p}^{(i)}$ ist $\mathfrak{p}$-primär.

Beweis. (a) Ist $r \in \mathfrak{p}^{(i)}$, so gilt $\varphi(r) = \frac{r}{1} \in \mathfrak{p}^i R_\mathfrak{p}$. Das heißt, es existiert ein $s' \in R \setminus \mathfrak{p}$ und ein $z \in \mathfrak{p}^i$ mit $\frac{r}{1} = \frac{z}{s'}$. Nach der Definition von Lokalisierungen gibt es daher ein $s'' \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $s''(s'r - z) = 0$. Setzen wir $s = s''s'$, so gilt $sr = s''z \in \mathfrak{p}^i$ mit $s \notin \mathfrak{p}$.

Ist umgekehrt $sr \in \mathfrak{p}^i$ mit $r \in R$ und $s \notin \mathfrak{p}$, so gilt $\varphi(r) = \frac{r}{1} = \frac{rs}{s} \in \mathfrak{p}^i R_\mathfrak{p}$. Nach Definition der symbolischen Potenz bedeutet dies gerade $r \in \mathfrak{p}^{(i)}$.

Die zweite Aussage in (a) folgt sofort, wenn man $s = 1 \notin \mathfrak{p}$ setzt.

(b) Zunächst zeigen wir, dass $\mathfrak{p}^{(i)}$ primär ist. Es sei $xy \in \mathfrak{p}^{(i)}$ mit $x \notin \mathfrak{p}^{(i)}$. Nach (a) gibt es dann ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $xys \in \mathfrak{p}^i$ aber kein $s' \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $xs' \in \mathfrak{p}^i$. Insbesondere muss ys in $\mathfrak{p}$ liegen. Da $\mathfrak{p}$ nun aber prim ist und $s \notin \mathfrak{p}$ gilt, folgt $y \in \mathfrak{p}$. Damit ist $y^i \in \mathfrak{p}^i \subseteq \mathfrak{p}^{(i)}$. Das bedeutet, dass $\mathfrak{p}^{(i)}$ primär ist.

Aus $\mathfrak{p}^i \subseteq \mathfrak{p}^{(i)}$ folgt sofort $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{\mathfrak{p}^{(i)}}$. Es bleibt also, $\sqrt{\mathfrak{p}^{(i)}} \subseteq \mathfrak{p}$ zu zeigen. Sei $x \in \sqrt{\mathfrak{p}^{(i)}}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x^m \in \mathfrak{p}^{(i)}$. Nach (a) existiert daher ein $s \in R \setminus \mathfrak{p}$ mit $x^m \cdot s \in \mathfrak{p}^i \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, folgt $x^m \in \mathfrak{p}$ und somit auch $x \in \mathfrak{p}$. Insgesamt folgt also $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}^{(i)}}$, so dass $\mathfrak{p}^{(i)}$ $\mathfrak{p}$-primär ist.

□

Als nächstes möchten wir den Satz von Krull auf Ideale mit mehreren Erzeugern verallgemeinern. Dazu beweisen wir zunächst folgendes Korollar aus dem Satz von Krull.

Korollar 1.6. *Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ Primideale mit $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i und $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}') \geq 2$ in $R/\mathfrak{p}'$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq R$ mit $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i.*

Der Beweis erfordert das folgende Lemma über das Vermeiden von Primidealen.

Lemma 1.7 (Über das Vermeiden von Primidealen)**.** *Ist $I \subseteq R$ ein Ideal und $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ Primideale in R mit $I \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i, so gibt es ein $f \in I$ mit $f \notin \mathfrak{q}_i$ für alle i.*

Beweis. Wir beweisen das Lemma mittels Induktion über s. Der Fall $s = 1$ ist klar. Sei also $s > 1$ und die Aussage für $s - 1$ wahr. Wir können $\mathfrak{q}_i \not\subseteq \mathfrak{q}_j$ für $i \neq j$ annehmen, da es sonst effektiv weniger als s Primideale bei der Suche nach einem f zu vermeiden gäbe, so dass die Aussage nach Induktionsvoraussetzung folgen würde. Dann gilt auch $I \cap \mathfrak{q}_j \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für $i \neq j$, da $\mathfrak{q}_i$ ein Primideal ist und $I \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ nach Voraussetzung gilt. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert nun ein $P_j \in I \cap \mathfrak{q}_j$ mit $P_j \notin \mathfrak{q}_i$ für alle $i \neq j$. Wir setzen nun $Q_k = \prod_{j \neq k} P_j$ und $f = \sum_{k=1}^{s} Q_k$. Dann liegt Q_k in allen $\mathfrak{q}_j \cap I$ für $j \neq k$ aber nicht in $\mathfrak{q}_k$. Insbesondere ist $f \in I$ aber $f \notin \mathfrak{q}_k$ für alle k. $\square$

Wir benutzen nun das Lemma um das Korollar zu beweisen

Beweis von Korollar 1.6. Nach Lemma 1.7 gibt es ein $x \in \mathfrak{p}$ mit $x \notin \mathfrak{q}_i$ für alle i und $x \notin \mathfrak{p}'$. Ein minimaler Primteiler von $xR_\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'R_\mathfrak{p}$ in $R_\mathfrak{p}$ ist von der Form $\mathfrak{q}R_\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \subseteq R$ prim und $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Nach Satz 1.2 ist $h(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}') \leq 1$ und nach Voraussetzung $\dim R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}'R_\mathfrak{p} \geq 2$. Folglich gilt $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Wegen $x \in \mathfrak{q}$ und $x \notin \mathfrak{q}_i$ für alle i gilt zu dem $\mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i, so dass $\mathfrak{q}$ alle im Korollar genannten Eigenschaften erfüllt. $\square$

Nun, möchten wir den Satz von Krull für beliebige Ideale verallgemeinern.

Satz 1.8 (Verallgemeinerter Krullscher Hauptidealsatz)**.** *Es sei $I = (a_1, \ldots, a_m) \subsetneq R$ ein Ideal und $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler von I. Es gilt $h(\mathfrak{p}) \leq m$.*

Beweis. Wir beweisen den Satz mittels Induktion über m. Der Fall $m = 1$ ist gerade Satz 1.2. Sei also nun $m > 1$ und das Resultat für $m - 1$ wahr. Weiter seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_s$ die minimalen Primteiler von $(a_1, \ldots, a_{m-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $h(\mathfrak{q}_i) \leq m - 1$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler von I und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_l$ mit $l = h(\mathfrak{p})$ eine Kette von Primidealen. Wir können ohne Einschränkung $l \geq 2$ annehmen. Weiter können wir auch $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i annehmen, da sonst $h(\mathfrak{p}) \leq h(\mathfrak{q}_i) \leq m - 1$ ist. Durch wiederholte Anwendung von Korollar 1.6 lässt sich die Kette $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_l$ sukzessive abändern, so dass $\mathfrak{p}_k \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle $k < l$ und alle i gilt.

Wir setzen nun $\overline{R} = R/(a_1, \ldots, a_{m-1})$ und notieren auch das Bild von $r \in R$ in $\overline{R}$ mit $\overline{r}$ und ebenso für die Bilder von Idealen. Dann ist $\overline{\mathfrak{p}}$ ein minimaler Primteiler von $\overline{I} = (\overline{a_m})$. Nach Satz 1.2 ist somit $h(\overline{\mathfrak{p}}) \leq 1$. Da $(a_1, \ldots, a_{m-1}) \subseteq \mathfrak{q}_i \not\supseteq \mathfrak{p}_{l-1}$ für alle i gilt, folgt auch $\overline{\mathfrak{p}_{l-1}} \not\subseteq \mathfrak{q}_i$ für alle i. Nun sind nach Konstruktion aber die $\mathfrak{q}_j$'s gerade die minimalen Primideale in $\overline{R}$. Daher ist $\overline{\mathfrak{p}}$ ein minimaler Primteiler von $\overline{\mathfrak{p}_{l-1}}$, da $h(\overline{\mathfrak{p}}) \leq 1$ und kein Primideal mit Höhe 0 Primteiler von $\overline{\mathfrak{p}_{l-1}}$ ist. Somit ist auch $\mathfrak{p}$ minimaler Primteiler von $\mathfrak{p}_{l-1} + (a_1, \ldots, a_{m-1})$. Das heißt $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}$ ist in $R/\mathfrak{p}_{l-1}$ minimaler Primteiler von $(a_1, \ldots, a_{m-1})/\mathfrak{p}_{l-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung bedeutet dies $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}) \leq m-1$. Da aber auch $h(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_{l-1}) \geq l - 1$ gilt, folgt $h(\mathfrak{p}) = l \leq m$. $\square$

Die folgende Größe misst die Anzahl der Elemente die man mindestens benötigt, um ein gegebenes Ideal zu erzeugen.

Definition 1.9. *Für ein Ideal $I \subsetneq R$ definieren wir*

$$\mu(I) = \inf\{m \mid \exists a_1, \ldots, a_m \in R : \ I = (a_1, \ldots, a_m)\}.$$

Aus dem obigen Satz folgt nun die folgende Abschätzung

Korollar 1.10. *Es gilt stets $h(I) \leq \mu(i)$. Insbesondere ist die Höhe eines Ideals stets endlich.*

Bemerkung 1.11. *Da jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$ die Form $(X_1-a_1, \ldots, X_n-a_n)$ für geeignete $a_1, \ldots, a_n \in k$ hat, gilt $h(\mathfrak{m}) \leq n$. Insbesondere ist $k[X_1, \ldots, X_n]$ und somit auch $\mathbb{A}_k^n$ und jede quasiaffine Varietät $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ endlich-dimensional. Jede Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen in $\mathbb{P}_k^n$ korrespondiert zu einer Kette homogener Primideale in $k[X_0, \ldots, X_n]$ und hat somit maximal die Länge $n+1$. Folglich ist auch $\mathbb{P}_k^n$ und auch jede quasiprojektive Varietät $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ endlich-dimensional.*

Für lokale Ringe erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 1.12. *Es sei R lokal und $\mathfrak{m}$ sein Maximalideal. Für jedes $\mathfrak{m}$-primäre Ideal I gilt $\mu(I) \geq \dim R$. Insbesondere gilt $\mu(\mathfrak{m}) \geq dimR$.*

Dies folgt aus Satz 1.8, sobald wir wissen, dass für ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal $\mathfrak{m}$ immer ein minimaler Primteiler ist. Das folgt aber aus dem folgenden allgemeineren Lemma.

Lemma 1.13. *Es sei $\mathfrak{m} \subseteq R$ ein Maximalideal und $I \subsetneq R$ ein Ideal. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) Das Ideal I ist $\mathfrak{m}$-primär.

(ii) Das Maximalideal $\mathfrak{m}$ ist der einzige Primteiler von I.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Wegen $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ ist $\sqrt{(0)} = \mathfrak{m}/I$ in R/I. Daher ist $\mathfrak{m}/I$ das einzige Primideal in R/I und damit ist $\mathfrak{m}$ der einzige Primteiler von I.

$(ii) \Rightarrow (i)$: In R/I ist $\mathfrak{m}/I$ das einzige Primideal und somit gilt $\sqrt{(0)} = \mathfrak{m}/I$. Daraus folgt $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$. Bleibt zu zeigen, dass I primär ist. Ist nun $a \cdot b \in I$ mit $b \notin I$, dann ist das Bild von $\overline{a}$ von a in R/I Null oder ein Nullteiler und somit keine Einheit. Daher gilt $\overline{a} \in \mathfrak{m}/I = \sqrt{(0)}$, so dass es $n \in \mathbb{N}$ mit $\overline{a}^n = 0$ und somit $a^n \in I$ gibt. □

2 Die Umkehrung des verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatzes

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass im Sinne des folgenden Satzes auch die Umkehrung des verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatzes gilt.

Satz 2.1. *Zu Jedem Primideal* $\mathfrak{p}$ *gibt es* $m := h(\mathfrak{p})$ *Elemente* $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{p}$*, so dass* $\mathfrak{p}$ *minimaler Primteiler von* $(a_1 \ldots, a_m)$ *ist.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zunächst eine Verallgemeinerung des Lemmas 1.7.

Lemma 2.2. *Es seien* $J \subseteq I$ *Ideale mit* $Z(J) = Z(I)$ *und* $m = \mu(I/J)$ *die minimale Anzahl von Erzeugern von* $I/J \subseteq R/J$*. Weiter seien* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ *Primideale mit* $I \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$*. Dann existieren* $a_1, \ldots, a_m \in I$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $I = (a_1, \ldots, a_m) + J$.

(b) Für alle i *gilt* $a_i \notin \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$.

(c) Für $\mathfrak{p} \supseteq (a_1, \ldots, a_m)$ *mit* $\mathfrak{p} \not\subseteq I$ *gilt* $h(\mathfrak{p}) \geq m$.

Beweis. Wir konstruieren induktiv $a_1, \ldots, a_r \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$ für $0 \leq r \leq m$, so dass deren Bilder $\overline{a}_i$ in I/J Teil eines minimalen Erzeugendensystems sind und so dass gilt: Ist $\mathfrak{p} \supseteq (a_1, \ldots, a_r)$ und $I \not\subseteq \mathfrak{p}$ so folgt $h(\mathfrak{p}) \geq r$. Für $r = m$ ist das gerade die Behauptung des Lemmas.

Für $r = 0$ ist die Konstruktion trivial. Es seien also $a_1, \ldots, a_r$ für $0 \leq r < m$ von der gewünschten Form. Wir möchten nun ein passendes a_{r+1} konstruieren. Es sei zunächst $a \in I$, so dass die Bilder $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_r}, \overline{a}$ in R/J Teil eines minimalen Erzeugendensystems von I/J sind. Weiter seien $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t$ die minimalen Primteiler von $(a_1, \ldots, a_r)$, die $I \not\subseteq \mathfrak{q}_j$ und somit nach Lemma 1.7 auch $I \not\subseteq \bigcup_j \mathfrak{q}_j$ erfüllen, und X die maximalen Elemente bezüglich der Inklusion in der Menge $\{\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$. Wir zerlegen X disjunkt in $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 = \{\mathfrak{p} \in X \mid a \in \mathfrak{p}\}$ und $X_2 = \{\mathfrak{p} \in X \mid a \notin \mathfrak{p}\}$. Wegen $Z(I) = Z(J)$ gilt $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ und somit $J \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$. Daher gibt es ein $b \in J$ mit $b \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in X$. Nach Lemma 1.7 angewandt auf das Ideal $\bigcap_{\mathfrak{p} \in X_2} \mathfrak{p}$ gibt es ein $\lambda \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in X_2} \mathfrak{p}$ mit $\lambda \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in X_1} \mathfrak{p}$, denn wegen der Maximalitätseigenschaft in X gilt $\bigcap_{\mathfrak{p} \in X_2} \mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}'$ für alle $\mathfrak{p}' \in X_1$, da die $\mathfrak{p} \in X_2$ prim sind. Wir setzen nun $a_{r+1} := a + \lambda b$. Dann gilt $a_{r+1} \notin \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in X$, insbesondere also $a_{r+1} \notin \mathfrak{p}_j$ für alle j. Außerdem ist $a_{r+1} \equiv a \bmod J$, so dass auch $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{r+1}} \in I/J$ Teil eines minimalen Erzeugendensystems sind. Ist $\mathfrak{p} \supseteq (a_1, \ldots, a_{r+1})$ mit $\mathfrak{p} \not\supseteq I$, so ist $h(\mathfrak{p}) \geq r + 1$, denn es gilt $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}_i$ für ein i, $h(\mathfrak{q}_i) \geq r$ nach Induktion und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}_i$, da $a_{r+1} \notin \mathfrak{q}_i$. □

Mit Hilfe des Lemmas können wir nun die Umkehrung des verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatzes beweisen.

Beweis. Wir setzen $I := \mathfrak{p}$ und $J := \mathfrak{p}^2$. Dann ist

$$\mu(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2) \geq \mu(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2 R_{\mathfrak{p}}) = \dim_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2 R_{\mathfrak{p}} \geq \dim R_{\mathfrak{p}} = h(\mathfrak{p}) = m.$$

Nach Lemma 2.2 gibt es nun $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{p}$ mit $h(\mathfrak{p}') \geq m$ für alle $\mathfrak{p}'$ mit $\mathfrak{p}' \supseteq (a_1, \ldots, a_m)$ und $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{p}'$. Insbesondere ist $\mathfrak{p}$ ein minimaler Primteiler von $(a_1, \ldots, a_m)$. □

3 Geometrische Interpretation

Um die bisherigen Resultate geometrische interpretieren zu können, benötigen wir noch ein Resultat aus der kommutativen Algebra, dass wir allerdings nicht beweisen werden. Zunächst definieren wir folgenden Begriff.

Definition 3.1. *Wir nennen eine Kette von Primidealen* $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ maximal, *falls* $\mathfrak{p}_0$ *ein minimales Primideal ist,* $\mathfrak{p}_n$ *ein maximales Primideal ist und für alle* $0 \leq j < n$ *kein Primideal* $\mathfrak{p}$ *mit* $\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{j+1}$ *existiert.*

Das angekündigte Resultat ist nun folgendes.

Satz 3.2. *Ist* R *eine nullteilerfreie* k*-Algebra, so haben alle maximalen Primidealketten die gleiche Länge. Insbesondere gilt stets* $\dim R = \dim R/I + h(I)$.

Nun können wir Satz 1.8 geometrisch interpretieren.

Korollar 3.3. *Ist* V *eine irreduzible, affine (oder projektive) Varietät und* $f_1, \ldots, f_m$ *(homogene) Elemente aus* $\mathcal{O}_V$*, dann gilt für die Dimension einer irreduziblen Komponente* Z *von* $Z(f_1, \ldots, f_m)$ *die Ungleichung* $\dim Z \geq \dim V - m$.

Beweis. Wir betrachten nur den affinen Fall. Der projektive Fall folgt analog. Ist Z eine irreduzible Komponente von $Z(f_1, \ldots, f_m)$ und $\mathfrak{p}$ der zugehörige minimale Primteiler von $(f_1, \ldots, f_m)$, so gilt

$$\dim Z = \dim \mathcal{O}_V/\mathfrak{p} = \dim \mathcal{O}_V - h(\mathfrak{p}) \geq dimV - m,$$

wobei die Ungleichung gerade aus Satz 1.8 folgt. □

Bemerkung 3.4. *(a) Man beachte, dass auch für* $\dim V \geq m$ *die Menge* $Z(f_1, \ldots, f_m)$ *leer sein kann, da keine solche irreduzible Kompenente existieren muss.*

(b) Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems $f_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $f_i \in K[X_1, \ldots, X_n]$ *ist entweder leer oder eine Varietät, deren irreduzible Komponenten alle mindestens die Dimension* $n - m$ *haben.*

(c) Ist $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ *eine irreduzible Varietät, so benötigt man mindestens* $n - \dim V$ *Gleichungen um sie zu beschreiben.*

Als nächstes möchten wir ein allgemeines Resultat über die Dimension der irreduziblen Komponenten von Durchschnitten von Varietäten beweisen.

Satz 3.5. *Sind* $V, W \in \mathbb{A}_k^n$ *irreduzible Varietäten, dann gilt für die Dimension einer irreduzible Komponente* Z *von* $V \cap W$ *die Ungleichung* $\dim Z \geq \dim V + \dim W - n$.

Beweis. Der Beweis beruht vor allem auf der Idee $V \cap W \cong V \times W \cap \Delta$ zu identifizieren, wobei $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^n \mid x \in \mathbb{A}_k^n\}$ die Diagonale in $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^n$ ist. Wir schreiben kurz $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Die Koordinatenringe von V und W sind $\mathcal{O}_V = A/I(V)$ und

$\mathcal{O}_W = A/I(W)$. Der Koordinatenring des Produkts $V \times W$ ist das Tensorprodukt der Koordinatenringe von V und W. Es gilt also insbesondere

$$\mathcal{O}_{V\times W} \cong \mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W \cong A \otimes_k A/(I(V) \otimes_k A + A \otimes_k I(W)).$$

Ist $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_W$ ein minimales Primideal, so folgt aus Satz 3.2

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W/\mathfrak{p}_0) =& \dim A \otimes_k A - h(I(V) \otimes_k A + A \otimes_k I(W)) \\ =& 2n - (h(I(V)) + h(I(W))) = \dim V + \dim W.\end{aligned}$$

In $A \otimes_k A \cong k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ haben wir das Ideal $D = (X_1 - Y_1, \dots, X_n - Y_n)$. Für dieses Ideal gilt gerade $Z(D) = \Delta$. Es sei $\varphi\colon A \otimes_k A \to \mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W$ der kanonische Homomorphismus. Dann gilt

$$\mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W/\varphi(D) \cong A \otimes_k A/(I(V) \otimes_k A + A \otimes_k I(W) + D) \cong A/(I(V) + I(W)).$$

Daher erhalten wir $\mathcal{O}_{V\cap W} \cong (A/(I(V) + I(W))_{\mathrm{red}} \cong (\mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W/\varphi(D))_{\mathrm{red}}$. Das heißt, dass die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_{V\cap W}$ genau den minimalen Primteilern von $\varphi(D)$ in $\mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W$ entsprechen. Sei nun Z eine irreduzible Komponente von $V \cap W$, $\mathfrak{p}$ das zugehörige minimale Primideal in $\mathcal{O}_{V\cap W}$ und $\mathfrak{p}'$ der entsprechende minimale Primteiler von $\varphi(D)$ in $\mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W$. Nach Satz 1.8 gilt nun $h(\mathfrak{p}') \leq n$, da D durch n Elemente erzeugt wird. Daher folgt mit Satz 3.2

$$\dim Z = \dim \mathcal{O}_V \otimes_k \mathcal{O}_W/\mathfrak{p}' = \dim V + \dim W - h(\mathfrak{p}') \geq \dim V + \dim W - n.$$

$\square$

Dieser Satz lässt sich auch für projektive Varietäten formulieren und beweisen.

Satz 3.6. *Sind $V, W \subseteq \mathbb{P}^n_k$ irreduzible Varietäten, dann gilt für die Dimension einer irreduziblen Komponente Z von $V \cap W$ die Ungleichung $\dim Z \geq \dim V + \dim W - n$. Des Weiteren gilt $V \cap W \neq \emptyset$, falls $\dim V + \dim W \geq n$.*

Beweis. Es sei $q\colon \mathbb{A}^{n+1}_k \to \mathbb{P}^n_k$ die kanonische Quotientenabbildung. Wir betrachten die affinen Kegel $\widetilde{V} = q^{-1}(V) \cup \{0\}$, $\widetilde{W} = q^{-1}(W) \cup \{0\}$ und $\widetilde{V \cap W} = q^{-1}(V \cap W) \cup \{0\} = \widetilde{V} \cap \widetilde{W}$. Ist Z eine irreduzible Komponente von $V \cap W$ so ist, $\widetilde{Z} = q^{-1}(Z) \cup \{0\}$ eine irredduzible Komponente von $\widetilde{V} \cap \widetilde{W}$ und Satz 3.5 besagt

$$\dim Z = \dim \widetilde{Z} - 1 \geq \dim \widetilde{V} + \dim \widetilde{W} - (n+2) = \dim V + \dim W - n.$$

Des Weiteren ist $0 \in \widetilde{V} \cap \widetilde{W}$, so dass $\widetilde{V} \cap \widetilde{W} \neq \emptyset$. Daher existiert eine irreduzible Komponente Z' von $\widetilde{V} \cap \widetilde{W}$. Ist $\dim V + \dim W \geq n$, so ist nach Satz 3.5 $\dim Z' \geq 1$ und somit $q(Z') \neq \emptyset$, so dass auch $V \cap W$ nicht leer sein kann. $\square$

Als nächstes möchten wir eine geometrische Interpretation für die Umkehrung des verallgemeinerten Krullschen Hauptidealsatzes geben.

Satz 3.7. *Ist $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ eine irreduzible Varietät der Dimension $d = \dim Z$, so gibt es $f_1, \dots, f_{n-d} \in k[X_1, \dots, X_n]$, so dass Z eine irreduzible Komponente von $Z(f_1, \dots, f_{n-d})$ ist.*

Beweis. Nach Satz 2.1 gibt es zu dem Primideal $\mathfrak{p} = I(Z)$ Elemente $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $m = h(\mathfrak{p})$, so dass $\mathfrak{p}$ minimaler Primteiler von $(f_1, \dots, f_m)$ ist. Das heißt, Z ist irreduzible Komponente von $Z(f_1, \dots, f_m)$. Nun gilt aber nach Satz 3.2

$$d = \dim Z = \dim k[X_1, \dots, X_n] - h(\mathfrak{p}) = n - m.$$

□

Beispiel 3.8. *Im Allgemeinen ist nicht für jede irreduzible Varietät $Z \subseteq \mathbb{A}_k^n$ das Ideal $I(Z)$ von $n - \dim Z$ Elementen erzeugt. Wir betrachten als Beispiel die Kurve*

$$Z = \{(t^3, t^4, t^5) \in \mathbb{A}_k^3 \mid t \in k\}.$$

Es gilt $I(Z) = (x^2y - z^2, zx - y^2, x^3 - zy)$, vergleiche Aufgabe 4.1 a). Nun ist

$$\mathbb{A}_k^1 \to Z, \quad t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$$

ein Homöomorphismus. Insbesondere ist Z irreduzibel und von Dimension $\dim Z = 1$. Allerdings besitzt kein homogener Anteil eines Elementes von $I(Z)$ den homogenen Grad 0 oder 1. Jedoch spannen die homogenen Anteile der Elemente von $I(Z)$ vom homogenen Grad 2 den 3-dimensionalen Vektorraum $\{z^2, zx - y^2, zy\} \cdot k$ auf. Das heißt, ein Erzeugendensystem muss mindestens drei Elemente enthalten.

Wir schreiben im Folgenden kurz $f_1 = x^2y - z^2$, $f_2 = zx - y^2$ und $f_3 = x^3 - zy$. Dann ist Z jedoch irreduzible Komponente von $Z(f_j, f_k)$ für $j \neq k$. Denn die f_j sind prim für alle j, so dass wegen $Z(f_j, f_k) \subsetneq Z(f_j)$ folgt $1 \leq \dim Z(f_j, f_k) < \dim Z(f_j) = 2$. Also ist $\dim Z(f_j, f_k) = 1$ und somit $Z \subseteq Z(f_j, f_k)$ eine irreduzible Komponente. Expliziter kann man beispielsweise sehen, dass $y \cdot f_3 = x \cdot f_1 + z \cdot f_2$. Daher ist

$$\begin{aligned} Z(f_1, f_2) =& Z(f_1, f_2, y \cdot f_3) = Z(f_1) \cap Z(f_2) \cap (Z(y) \cup Z(f_3)) \\ =& Z \cup Z(f_1, f_2, y) = Z \cup Z(y, z). \end{aligned}$$

Die Varietät $Z(f_1, f_2)$ hat als irreduziblen Komponenten also gerade Z und die x-Achse.

Bemerkung 3.9. *Es ist ein ungelöstes Problem, ob jede Kurve in $\mathbb{A}_k^n$ der Durchschnitt von $n-1$ Hyperflächen ist. Dies ist allerdings kein Widerspruch zu Beispiel 3.8, denn geometrisch lässt sich Z in Beispiel 3.8 durchaus als Schnitt zweier Hyperflächen beschreiben: Es gilt $Z = Z(xz - y^2, x^5 - 2x^2yz + z^3)$. Zwar ist*

$$(xz - y^2, x^5 - 2x^2yz + z^3) \neq (x^2y - z^2, zx - y^2, x^3 - zy)$$

aber es gilt

$$\sqrt{(xz - y^2, x^5 - 2x^2yz + z^3)} = (x^2y - z^2, zx - y^2, x^3 - zy).$$

Literatur

[Looijenga] Looijenga, Eduard: *A first course on Algebraic Geometry.* http://www.staff.science.uu.nl/ looij101/algmtk.pdf.