Kurztest 2

______________________ ______________________
Name Unterschrift

Aufgabe 1. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ eine Matrix in Jordannormalform. Durch die Angabe welche der folgenden Daten ist A bereits bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt:

☐ Das charakteristische Polynom χ_A und die geometrischen Vielfachheiten $m_g(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A.

☐ Das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom M_A.

☐ Das Minimalpolynom M_A und sowohl die geometrischen Vielfachheiten $m_g(\lambda)$ als auch die algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A.

☐ Keine der obigen Daten bestimmen A eindeutig bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke.

Aufgabe 2. Es sei φ ein Endomorphismus mit $\varphi^5 = \varphi^3$. Listen Sie genau die Zahlen auf, die als Eigenwerte von φ auftreten können.

Antwort: ______________________

Aufgabe 3. In welchen der folgenden Fällen ist die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ über $\mathbb{R}$ stets diagonalisierbar?

☐ $a = 0$ und $b = c$. ☐ $b = 0$. ☐ $a = b$ und $c = 0$. ☐ $a = 1$ und $b = -c$.

Aufgabe 4. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

- Das charakteristische Polynom $\chi_A =$
- Das Minimalpolynom $M_A =$
- Zum Eigenwert 1 die geometrische Vielfachheit $m_g(1) =$

Aufgabe 5. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{C})$ mit Minimalpolynom $M_A(x) = (x-1)(x-2)^2$. Listen Sie für A alle möglichen Jordannormalformen bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke auf. (Es genügt, wenn Sie in den Matrizen nur die Einträge ungleich Null notieren.)

Aufgabe 6. Welche der folgenden Abbildungen sind Skalarprodukte?

☐ $\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_2 - a_2 b_1$ auf $\mathbb{R}^2$.

☐ $\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 - a_2 b_2$ auf $\mathbb{R}^2$.

☐ $\langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(A^T B)$ auf $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$.

☐ $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$ auf $C[0,1]$, der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.