Übungsblatt 8

Abgabe am Freitag, 16.12.2016 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Mengen $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$ haben die gleiche Kardinalität.

(b) Die Mengen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben die gleiche Kardinalität.

(c) Für eine natürliche Zahl n seien $A_1, \ldots, A_n$ abzählbare Mengen. Dann ist auch das Produkt $\prod_{j=1}^{n} A_j$ abzählbar.

(d) Es seien $A \subseteq B$ Mengen, wobei A abzählbar und B nicht abzählbar sei. Dann ist $B \setminus A$ nicht abzählbar.

Präsenzaufgabe 2. (a) Bringen Sie die Quadrik $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 5 = 0$ mittels Hauptachsentransformation in Normalform und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik an.

(b) Bringen Sie die Quadrik $5x_1^2 + x_1x_3 + 3x_2^2 = 0$ mittels Hauptachsentransformation in Normalform.

(c) Es sei E eine Ellipse mit den Hauptachsen $v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und den Hauptachsenabschnitten 3 und 1. Bestimmen Sie zu E die zugehörige Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0,$$

in der $a_{12} \neq 0$.

Aufgabe 8.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Wir betrachten den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{Q})$ und den Untervektorraum V_0 der von allen Abbildungen

$$f_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = n \\ 0 & \text{falls } i \neq n \end{cases}$$

für $i \in \mathbb{N}$ erzeugt wird. Dann gibt es einen Isomorphismus von Vektorräumen $V_0 \xrightarrow{\sim} V$.

(b) Wir nennen eine Zahl $x \in \mathbb{C}$ algebraisch, wenn sie Nullstelle eines nicht-konstanten Polynoms $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ ist. Die Menge aller algebraischen Zahlen $\overline{\mathbb{Q}}$ ist abzählbar.

(c) Wenn die beiden Mengen A und B die gleiche Kardinalität haben, so haben auch $\mathrm{Abb}(A, A)$ und $\mathrm{Abb}(B, B)$ die gleiche Kardinalität.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei V_n ein abzählbarer Vektorraum. Dann ist auch der Vektorraum $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ abzählbar.

Aufgabe 8.2 (2+2 Punkte)**.** (a) Es sei V ein Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Nutzen Sie das Lemma von Zorn um zu zeigen, dass stets ein Komplement zu U existiert, das heißt ein Untervektorraum W mit $V = U \oplus W$.

(b) Sei nun V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und U ein Untervektorraum. Ist dann das orthogonale Komplement $U^\perp$ stets ein Komplement im obigen Sinne? Gilt also stets $U \oplus U^\perp = V$?

Aufgabe 8.3 (1+1+1+1 Punkte)**.** (a) Bringen Sie die Quadrik $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0$ mittels Hauptachsentransformation in Normalform und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik an.

(b) Bringen Sie die Quadrik $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - x_2 - 5 = 0$ mittels Hauptachsentransformation in Normalform und fertigen Sie eine Skizze der Quadrik an.

(c) Bringen Sie die Quadrik $x_1^2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 = 0$ mittels Hauptachsentransformation in Normalform.

(d) Es sei E eine Ellipse mit den Hauptachsen $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und den Hauptachsenabschnitten 3 und 2. Bestimmen Sie zu E die zugehörige Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 1 = 0,$$

in der $a_{12} \neq 0$.