Übungsblatt 6

Abgabe am Freitag, 09.12.2016 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

eine unitäre Matrix S, so dass $\overline{S}^t AS$ eine Diagonalmatrix ist, und eine Orthogonale Matrix T, so dass

$$T^t AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für ein $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $C[-1,1]$ der reelle Vektorraum der stetigen Abbildungen $[-1,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ für alle $f, g \in C[-1,1]$ ein Skalarprodukt auf $C[-1,1]$ definiert.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Untervektorraum $V_n = \mathrm{span}(1, t, t^2, \ldots, t^n) \subseteq C[-1,1]$. Beschreiben Sie die Matrix der Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V_n bezüglich der Basis $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$.

(c) Bestimmen sie eine Orthonormalbasis von V_3.

Aufgabe 6.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Wir bezeichnen das orthogonale Komplement mit $U^\perp$. Dann gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

(b) Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, φ ein unitärer Endomorphismus von V und sei U ein φ-invarianter Unterraum von V. Dann ist auch $U^\perp$ ein φ-invarianter Unterraum.

(c) Bei jedem Fußballspiel, bei dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle des umgebenden Raumes befindenen.

(d) Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $z, \overline{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $z = v + iw$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 6.2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathscr{L}^2$ der quadratisch summierbaren Folgen:

$$\mathscr{L}^2 = \{x \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_+, \mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ für alle $x, y \in \mathscr{L}^2$ ein Skalarprodukt auf $\mathscr{L}^2$ definiert.

(b) Es sei $U \subseteq \mathscr{L}^2$ der Untervektorraum aller Folgen mit höchstens endlich vielen von 0 verschiedenen Folgengliedern. Zeigen Sie $U^\perp = 0$.

(c) Für jedes $m \in \mathbb{N}_+$ sei $x_m \in \mathscr{L}^2$ der Vektor mit den Folgengliedern $(x_m)_k = \frac{1}{k^m}$ für alle $k \in \mathbb{N}_+$. Für $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir den Untervektorraum $V_n = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_n) \subseteq \mathscr{L}^2$. Beschreiben Sie die Matrix der Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V_n bezüglich der Basis $(x_1, \dots, x_n)$.

(d) Geben Sie eine Orthonormalbasis für V_3 an.

Die Funktion $\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ für $s \in \mathbb{R}_{>1}$ heißt Riemannsche Zetafunktion. Schreiben Sie abkürzend $\zeta(s)$, wenn immer Ihnen entsprechende Werte begegnen.

Aufgabe 6.3 (1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Menge der Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen, deren Diagonaleinträge alle 1 sind und $\mathcal{P} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen. Wir möchten in dieser Aufgabe zeigen, dass die Multiplikationsabbildung

$$O(n) \times \mathcal{D} \times \mathcal{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad (T, D, R) \mapsto T \cdot D \cdot R$$

eine Bijektion ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Multiplikationsabbildung $\mathcal{D} \times \mathcal{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ eine Bijektion $\mathcal{D} \times \mathcal{R} \to \mathcal{P}$ liefert.

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikationsabbildung $O(n) \times \mathcal{P} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ injektiv ist.
(Hinweis: Zeigen sie Produkte und Inverse von orthogonalen und oberen Dreiecksmatrizen sind wieder orthogonal bzw. obere Dreiecksmatrizen. Welche obere Dreiecksmatrizen sind orthogonal?)

(c) Es sei B eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Weiter sei A die Orthonormalbasis, die man aus B durch das Gram–Schmidt Verfahren erhält. Zeigen Sie, dass die Basiswechselmatrix ${}_B\mathrm{Id}_A$ in $\mathcal{P}$ liegt.
(Hinweis: Stellen sie die einzelnen Operationen des Gram-Schmidt verfahren als Multiplikation mit Elementarmatritzen dar)

(d) Folgern Sie nun aus (c) die Surjektivität der Multiplikationsabbildung $O(n) \times \mathcal{P} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.