# Übungsblatt 5

Abgabe am Freitag, 02.12.2016 bis 16 Uhr

**Präsenzaufgabe 1.** (a) Bestimmen Sie die Jordannormalform $J$ von

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie eine Matrix $S$, so dass $S^{-1}MS = J$.

(b) Zeigen Sie, dass $M$ die Gleichung $M^4 - 7M^3 + 16M^2 = 12M$ erfüllt und Rang 3 hat. Welche weiteren Jordannormalformen (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) von Rang 3 erfüllen ebenfalls diese Gleichung?

(c) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $6$ und $A \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus von Rang $4$, der $A^3 + 6A^2 + 9A = 0$ erfüllt. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von $A$.

**Präsenzaufgabe 2.** Es sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $v_1, \dots, v_r \in V$ eine Familie orthonormaler Vektoren. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $(v_1, \dots, v_r)$ ist eine Basis von $V$.

(ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $i$, dass $v = 0$.

(iii) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.

(iv) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.

(v) Für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^r |\langle v, v_i \rangle|^2$.

---

**Aufgabe 5.1** (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\dim V \leq 6$ und $\varphi$ ein Endomorphismus von $V$. Dann ist die Jordannormalform von $\varphi$ bereits durch die Angabe des charakteristischen Polynoms $\chi_\varphi$, des Minimalpolynoms $M_\varphi$ und den geometrischen Vielfachheiten $m_g(\lambda)$ für alle Eigenwerte $\lambda$ von $\varphi$ eindeutig bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke bestimmt.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt es bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke genau eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4n \times 4n, \mathbb{C})$ in Jordannormalform, so dass $\det(A) = 2$ und $\mathrm{Spur}(A) = 0$ gilt und die Matrix die Gleichung $(A^2 - 2)(A^2 - 1) = 0$ erfüllt.

(c) Für $n \geq 2$ sei auf $\mathbb{R}^n$ die Normalabbildung $\|v\| := \max\{|v_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$ gegeben. Dann existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

(d) Es sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der induzierten Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Zwei Vektoren $v, w \in V \setminus \{0\}$ sind genau dann orthogonal, wenn der Satz des Pythagoras gilt: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

**Aufgabe 5.2** (2+1+1 Punkte). (a) Bestimmen Sie die Jordannormalform $J$ von

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -4 & -1 \\ -5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie eine Matrix $S$, so dass $S^{-1}MS = J$.

(b) Zeigen Sie, dass $M$ die Gleichung $M^4 - M^3 = 2M^2$ erfüllt und Rang 3 hat. Welche weiteren Jordannormalformen (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke) von Rang 3 erfüllen ebenfalls diese Gleichung?

(c) Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 1$ existiert eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 0$ und $A^3 - 4A^2 = A - 4$?
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis, dass für zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ stets die Gleichung $\mathrm{Spur}(A \cdot B) = \mathrm{Spur}(B \cdot A)$ gilt.

**Aufgabe 5.3** (1+1+1+1 Punkte). Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer komplexen Struktur, d.h. einem Endomorphismus $J$ mit $J^2 = -\mathrm{id}$. Zeigen Sie:

(a) Die Dimension $d = \dim_{\mathbb{R}} V$ von $V$ ist gerade.

(b) Die skalare Multiplikation $(x + iy) \cdot v := xv + yJ(v)$ macht $V$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $d/2$. Diesen Vektorraum bezeichnen wir im Folgenden mit $\widetilde{V}$.

(c) Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ ein euklidsches Skalarprodukt auf $V$. Dann definiert

$$\langle v, w \rangle_{\widetilde{V}} := \langle v, w \rangle_V + i \langle v, J(w) \rangle_V \text{ für alle } v, w \in \widetilde{V}$$

ein unitäres Skalarprodukt auf $\widetilde{V}$.

(d) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_{d/2}$ bilden genau dann eine Orthonormalbasis von $\widetilde{V}$, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_{d/2}, J(v_1), \ldots, J(v_{d/2})$ eine Orthonormalbasis von $V$ bilden.