Übungsblatt 4

Abgabe am Freitag, 25.11.2016 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ihre verschiedenen Eigenwerte und d_i die Länge des längsten Jordanblocks zum Eigenwert λ_i. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von A die folgende Form hat:

$$M_A(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{d_i}.$$

Kann man auch die geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenwerte an der Jordan Normalform ablesen?

Präsenzaufgabe 2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordannormalform J von A und geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS = J$. Geben Sie auch das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Haupträume zu A an.

(b) Bestimmen Sie alle Jordannormalformen (bis auf Vertauschung der Jordanblöcke), die

(i) das gleiche Minimalpolynom wie A haben.

(ii) das gleiche charakteristische Polynom wie A haben.

(iii) sowohl das gleiche Minimalpolynom als auch das gleiche charakteristische Polynom wie A haben.

Aufgabe 4.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Gilt für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ die Gleichung $A^3 = A$, so ist A diagonalisierbar.

(b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine Matrix in Jordanscher Normalform, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ihre verschiedenen Eigenwerte und d die Anzahl der Einsen neben der Diagonalen. Dann gilt:

$$n = d + m_g(\lambda_1) + \dots + m_g(\lambda_r)$$

.

(c) Sind $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$ zwei Matrizen, so teilt das Minimalpolynom der Blockmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ das Produkt der Minimalpolynome von A und B, ist aber im Allgemeinen nicht gleich diesem Produkt.

(d) Es sei φ ein Endomorphismus auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V und λ_1, λ_2 zwei Eigenwerte von φ. Dann ist die Einschränkung von $\varphi - \lambda_1 \mathrm{Id}$ auf den Hauptraum $H(\varphi, \lambda_2)$ genau dann injektiv, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt.

Aufgabe 4.2 (2+2 Punkte)**.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jordannormalform J von A und geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS = J$. Geben Sie auch das charakteristische Polynom, das Minimalpolynom und die Haupträume zu A an.

(b) Bestimmen Sie alle Jordannormalformen (bis auf Vertauschung der Jordanblöcke), die

(i) das gleiche Minimalpolynom wie A haben.

(ii) das gleiche charakteristische Polynom wie A haben.

(iii) sowohl das gleiche Minimalpolynom als auch das gleiche charakteristische Polynom wie A haben.

Aufgabe 4.3 (1+1+2 Punkte)**.** Die Exponentialfunktion für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\exp(A) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ und $S \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ gilt: $\exp(SAS^{-1}) = S \cdot \exp(A) \cdot S^{-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass für $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ mit $AB = BA$ gilt: $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

(c) Berechnen Sie:

$$\exp\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Nutzen Sie (a) und (b), um die Rechnung auf die Berechnung der Exponentialfunktion einer Diagonalmatrix und einer nilpotenten Matrix zurückzuführen.