Übungsblatt 3

Abgabe am Freitag 18.11.2016, bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Es sei φ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $P \in K[X]$ ein Polynom, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(\varphi)$.

(b) Die Abbildung $K[X] \to \mathrm{End}(V), P \mapsto P(\varphi)$ ist ein Homomorphismus von K-Vektorräumen.

Präsenzaufgabe 2. Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Endomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass φ immer einen reellen Eigenwert hat.

(b) Zeigen Sie, dass φ einen positiven Eigenwert besitzt, falls $\det \varphi > 0$.

(c) Sei nun $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ein Endomorphismus mit $\det \varphi < 0$. Zeigen Sie, dass φ mindestens zwei reelle Eigenwerte hat.

Aufgabe 3.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist A eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Einträgen, so ist das charakteristische Polynom von A bis auf Vorzeichen das Minimalpolynom von A.

(b) Es sei $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ eine Permutation und $\varphi_\sigma\colon K^n \to K^n$ der Endomorphismus gegeben durch $\varphi_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ für die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_n$ von K^n. Dann ist 1 der einzige Eigenwert von φ_σ.

(c) Es seien $1 \leq d \leq n$ natürliche Zahlen und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n; K)$ die Matrix mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq j = i+1 \leq d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $P_A^d = \pm M_A^n$, wobei P_A das charakteristische Polynom von A und M_A das Minimalpolynom von A ist.

(d) Ist $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V und $P, Q \in K[X]$ zwei Polynome, so gilt $P(\varphi) \circ Q(\varphi) = (P \cdot Q)(\varphi)$.

Aufgabe 3.2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Sei weiter U ein φ-invarianter Unterraum und W ein Unterraum von V, so dass $V = U \oplus W$. Sei nun B_U eine Basis von U und B_W eine Basis von W.

(a) Beschreiben Sie die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Basis $B = B_U \cup B_W$ von V.

(b) Sei nun W zusätzlich φ-invariant. Welche Form hat dann die Darstellungsmatrix aus (a).

(c) Zeigen Sie: Wenn W φ-invariant ist gilt $\chi_\varphi = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\varphi|_W}$.

(d) Zeigen Sie: Im Allgemeinen ist $\chi_\varphi = \chi_{\varphi|_U} \cdot \chi_{\overline{\varphi}}$, wobei $\overline{\varphi}$ der von φ auf V/U induzierte Endomorphismus ist.

Aufgabe 3.3.

Aufgabe 3.4 (1+2+1 Punkte)**.** Es sei $V = \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$. Betrachte den Endomorphismus φ von V der jeder Matrix ihre transponierte zuweist: $\varphi(A) = A^T$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von φ.

(b) Bestimmen Sie die entsprechenden Eigenräume.

(c) Finden Sie eine Basis von $\mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ bezüglich der φ die Gestalt einer Diagonalmatrix ist.