Übungsblatt 2

Abgabe am Freitag, 11.11.2016 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Berechnen Sie für $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Präsenzaufgabe 2. Es sei $M \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Betrachte den Endomorphismus

$$\varphi_M \colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to \mathrm{Mat}(n \times n, K), \quad A \mapsto M \cdot A.$$

Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von φ_M der n-ten Potenz des charakteristischen Polynoms von M gleicht.

Aufgabe 1.1 (1+1+2 Punkte). Sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix über einem Körper K. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind v, w Eigenvektoren von A, so ist auch $v + w$ Eigenvektor von A.

(b) Die Abbildung vom Vektorraum $\mathrm{Mat}(n \times n, K)$ nach $V_n = \{f \in K[X] \mid \mathrm{grad}(f) \leq n\}$, dem Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich n, die jeder Matrix ihr charakteristisches Polynom zuordnet, ist eine lineare Abbildung.

(c) Ist a Eigenwert von $A^2 + A$, so ist a^2 Eigenwert von $A^3 + (1 + a) \cdot A^2$.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte). Es seien $m, n \geq 1$ ganzzahlig und $V_n = \{f \in K[X] \mid \mathrm{grad}(f) \leq n\}$ der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner gleich n. Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung

$$\varphi_m \colon V_n \to V_n, \quad f(x) \mapsto \frac{d^m f(x)}{(dx)^m},$$

die jedem Polynom seine m-te Ableitung zuordnet.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte). Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 1 & 1 & -b \end{pmatrix}$ eine Matrix über $\mathbb{R}$. Für welche Werte a, b ist die Matrix A über den reellen Zahlen trigonalisierbar? Für welche Werte a, b ist die Matrix A über den reellen Zahlen diagonalisierbar?