Übungsblatt 13

Abgabe am Freitag, 10.02.2017 bis 16 Uhr

Dieses Aufgabenblatt enthält insgesamt 7 Aufgaben zur Abgabe, um es Ihnen zu erleichtern, die zur Prüfungszulassung notwendige Punktzahl von 72 Punkten zu erreichen. Die erforderte Punktzahl verändert sich dadurch aber nicht, und es wird auch nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben bearbeiten, eine hilfreiche Übung ist dies allerdings dennoch.

Aufgabe 13.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe, deren Ordnung $\#G = n$ quadratfrei ist, das heißt, es gibt keine ganze Zahl $d \geq 2$ mit $d^2|n$. Dann ist G bereits zyklisch.

(b) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Die Gruppe $\mathrm{Aut}_K(V)$ der K-linearen Automorphismen von V mit der Komposition als Verknüpfung ist abelsch.

(c) Es sei p eine Primzahl. Jede Gruppe der Ordnung p^2, die ein Element der Ordnung p enthält, ist abelsch.

(d) Die Untergruppe $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist zu der Gruppe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ isomorph.

Aufgabe 13.2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei H die Untergruppe von $G = \mathbb{Z}^3$ gegeben durch

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x + 2y + 3z \equiv 0 \bmod 6\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von H.

(b) Zeigen Sie, dass die Untergruppe $K \subseteq \mathbb{Z}^3$, die von den Vektoren $v_1 = (4, -5, 2)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$ und $v_3 = (1, 7, -5)$ erzeugt wird, eine Untergruppe von H ist.

(c) Beschreiben Sie den Quotienten $\mathbb{Z}^3/K$ als direktes Produkt von $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ für gewisse $m_i \geq 0$.

(d) Beschreiben Sie den Quotienten H/K als direktes Produkt von $\mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ für gewisse $m_i \geq 0$.

Aufgabe 13.3 (2+2 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

Aufgabe 13.4 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $S = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ der Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen und $T = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ der Vektorraum der schiefsymmetrischen $n \times n$-Matrizen. Dann gilt $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) = S \oplus T$.

(b) Es sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $f_1, f_2 \colon V \times V \to \mathbb{R}$ zwei Skalarprodukte mit $f_1(v, v) = f_2(v, v)$ für alle $v \in V$. Dann gilt bereits $f_1 = f_2$.

(c) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Unterräume. Dann gilt stets $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(d) Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei Unterräume. Dann gilt stets $U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$.

Aufgabe 13.5 (2+2 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $f\colon V \times V \to \mathrm{R}$ eine symmetrische Bilinearform und $V_0 = \{v \in V \mid f(v, v) = 0\}$ ihr Ausartungsraum. Dann ist die Abbildung

$$V/V_0 \times V/V_0 \to \mathbb{R}, \quad (v + V_0, w + V_0) \mapsto f(v, w)$$

wohldefiniert und definiert ein Skalarprodukt auf V/V_0.

(b) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 2 und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Dann ist $A^{2^{n-1}}$ stets diagonalisierbar.

Aufgabe 13.6 (2+2 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{C}$ die Jordannormalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C})$ eine Matrix mit $\det(A) = 0$, $\mathrm{Spur}(A) = 3$ und $\mathrm{Spur}(A^2) = 5$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordannormalformen zu A (bis auf Vertauschung der Jordanblöcke).

Aufgabe 13.7 (2+2 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ genau dann ähnlich sind (d.h. es gibt eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $S^{-1}AS = B$), wenn für alle Polynome $P \in \mathbb{C}[X]$ gilt: $\mathrm{Rang}(P(A)) = \mathrm{Rang}(P(B))$.

(b) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ stets ähnlich zu ihrer Transponierten ist.