Übungsblatt 12

Abgabe am Freitag, 03.02.2017 bis 16 Uhr

Dieses Aufgabenblatt enthält insgesamt 5 Aufgaben zur Abgabe, um es Ihnen zu erleichtern, die zur Prüfungszulassung notwendige Punktzahl von 72 Punkten zu erreichen. Die erforderte Punktzahl verändert sich dadurch aber nicht, und es wird auch nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben bearbeiten, eine hilfreiche Übung ist dies allerdings dennoch.

Präsenzaufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es sei $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen und sei $s\colon C \to B$ ein Schnitt von g. Dann ist $A \times C \to B,\ (a,c) \mapsto f(a) + s(c)$ ein Isomorphismus.

(b) Das Zentrum $Z(G) := \{g \in G \mid \forall x \in G:\ xg = gx\} \subseteq G$ einer Gruppe G ist Normalteiler in G.

(c) Die Untergruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine freie Gruppe von Rank 2.

Präsenzaufgabe 2. (a) Es sei G eine Gruppe und $N, H \subseteq G$ Normalteiler mit $N \subseteq H$. Zeigen Sie, N ist auch Normalteiler in H, H/N ist Normalteiler von G/N und der kanonische Gruppenhomomorphismus

$$(G/N)/(H/N) \to G/H$$

ist ein Isomorphismus.

(b) Für eine Menge X und eine Gruppe G bezeichnen wir mit $G^X = \mathrm{Abb}(M, G)$ die Abbildungen von X nach G. Zeigen Sie, dass G^X auf natürliche Weise wieder eine Gruppe ist. Weiter sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass

$$N = \{f \in G^X \mid f(y) = 1 \text{ für alle } y \in Y\}$$

ein Normalteiler von G ist und dass $G^X/N \cong G^Y$ gilt.

Aufgabe 12.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Es seien A und B abelsche Gruppen so dass $A/kA \cong B/kB$ für alle ganzen Zahlen $k > 0$ gilt. Dann gilt bereits $A \cong B$.

(b) Es seien A und B **endlich erzeugte** abelsche Gruppen so dass $A/pA \cong B/pB$ für alle Primzahlen p gilt. Dann gilt bereits $A \cong B$.

(c) Die Gruppe $\mathbb{Q}_{>0}$ mit der Multiplikation als Verknüpfung ist endlich erzeugt.

(d) Es seien A und B abelsche Gruppen und $0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^n \to 0$ eine kurze exakte Sequenz. Dann spaltet diese kurze exakte Sequenz.

Aufgabe 12.2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei $n \geq 3$ eine ganze Zahl.

(a) Es sei D_n die Menge aller Drehungen und Spiegelungen die ein regelmäßiges n-Eck in sich selbst überführen. Zeigen Sie, dass D_n mit der Hintereinanderausführung zweier Transformationen aus D_n als Verknüpfung eine Gruppe bildet.

(b) Zeigen Sie, dass $\#D_n = 2n$.

(c) Zeigen Sie dass D_n nicht abelsch ist.

(d) Zeigen Sie dass es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to D_4 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$$

gibt. Spaltet diese Sequenz?

Aufgabe 12.3 (1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei G die Symmetrie Gruppe des Kreises $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, das heißt die Gruppe aller Drehungen und Spiegelungen, die den Kreis in sich selbst überführen.

(a) Zeigen Sie, dass $G \cong O(2) := \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid AA^t = I_2\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $O(2)$ für alle $n \geq 3$ eine Untergruppe $G_n \subseteq O(2)$ mit $G_n \cong D_n$ enthält.

(c) Ist H eine abelsche Gruppe. Dann ist $\{h \in H \mid \mathrm{ord}(h) < \infty\} \subseteq H$ eine Untergruppe.

(d) Zeigen Sie, dass $\{g \in O(2) \mid \mathrm{ord}(g) < \infty\} \subseteq O(2)$ keine Untergruppe ist, dass also (c) für nicht-abelsche Gruppen falsch sein kann.

Aufgabe 12.4 (1+2+1 Punkte)**.** Eine abelsche Gruppe G heißt torsionsfrei, wenn alle $g \in G \setminus \{0\}$ unendliche Ordnung haben.

(a) Zeigen Sie, dass jede freie abelsche Gruppe torsionsfrei ist.

(b) Eine abelsche Gruppe G heißt *teilbar*, falls zu jedem $x \in G$ und jeder ganzen Zahl $n \geq 1$ ein $y \in G$ existiert, so dass $n \cdot y = x$. Zeigen Sie, dass jede nicht-triviale teilbare abelsche Gruppe nicht frei ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung von (a) im Allgemeinen nicht gilt, indem Sie ein Beispiel für eine torsionsfreie abelsche Gruppe geben, die keine freie abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 12.5 (2+2 Punkte)**.** (a) Es sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Sei HN die Untergruppe von G erzeugt durch $H \cup N$. Zeigen Sie, N ist Normalteiler von HN, $H \cap N$ ist Normalteiler von H und der kanonische Gruppenhomomorphismus

$$H/H \cap N \to HN/N$$

ist ein Isomorphismus.

(b) Es sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein maximaler Normalteiler von G, das heißt für jeden Normalteiler N' mit $N \subseteq N' \subsetneq G$ gilt bereits $N = N'$. Weiter seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit $H_1 \cap N = H_2 \cap N = \{1\}$ und $H_1 \neq \{1\} \neq H_2$. Zeigen Sie, dass dann stets $H_1 \cong H_2$ gilt.