Übungsblatt 11

Abgabe am Freitag, 27.01.2017 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Es sei G eine Gruppe mit $\#G \leq 5$. Dann ist G bereits abelsch.

(c) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe mit $[G : H] = 2$. Dann ist H normal.

(d) Das Zentrum $Z(G) = \{z \in G \mid gz = zg \text{ für alle } g \in G\}$ einer Gruppe G ist stets ein Normalteiler von G.

Präsenzaufgabe 2. (a) Es sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) H ist ein Normalteiler von G, das heißt für alle $g \in G$ gilt $gH = Hg$.

(ii) Für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} = H$.

(iii) Für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} \subseteq H$.

(iv) Für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} \supseteq H$.

(b) Es sei $\varphi\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphsimus, H eine Untergruppe von G, N ein Normalteiler von G, H' eine Untergruppe von G' und N' ein Normalteiler von G'. Zeigen Sie:

(i) $\varphi(H)$ ist eine Untergruppe von G'.

(ii) $\varphi(N)$ ist im Allgemeinen kein Normalteiler von G'.

(iii) Falls φ surjektiv ist, ist $\varphi(N)$ Normalteiler von G'.

(iv) $\varphi^{-1}(H')$ ist eine Untergruppe von G.

(v) $\varphi^{-1}(N')$ ist ein Normalteiler von G.

Aufgabe 11.1 (2+2 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie

(a) Es seien m, n positive ganze Zahlen. Dann sind die Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ genau dann isomorph, wenn n und m teilerfremd sind.

(b) Eine Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $G \to G, g \mapsto g^2$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 11.2 (2+2 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie

(a) Es sei G eine Gruppe und H die Untegruppe die von der Menge $S = \{g^2 \mid g \in G\}$ erzeugt wird. Dann ist H ein Normalteiler von G und G/H is abelsch.

(b) Ist H_1 ein Normalteiler einer Gruppe G und H_2 ein Normalteiler von H_1, so ist auch H_2 Normalteiler von G.

Aufgabe 11.3 (1+3 Punkte)**.** Es sei G eine endliche Gruppe. Wir definieren die Teilmenge $M_G \subseteq G$ durch $M_G = \{a \in G \mid \mathrm{ord}(g) \text{ ist ungerade}\}$.

(a) Zeigen Sie: Falls G abelsch ist, bildet M_G eine Untergruppe von G.

(b) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass für die symmetrische Gruppe S_n von Grad n die Teilmenge $M_{S_n} \subseteq S_n$ keine Untergruppe bildet.