Übungsblatt 1

Abgabe am Freitag, 04.11.2016 bis 16 Uhr

Jeden Donnerstag erscheint ein Übungsblatt mit je zwei Präsenzaufgaben für die Übungsstunde oder zum eigenständigen Üben und drei Aufgaben mit jeweils 4 Punkten, die Sie zur Korrektur bis **Freitag 16 Uhr** in der darauffolgenden Woche abgeben können. Sie dürfen Lösungen in Gruppen bis zu maximal **2 Personen** einreichen. Um zur Klausur zugelassen zu werden, müssen Sie mindestens **72 Punkte** der Übungsblätter erreichen, sowie mindestens **3 der 4 Kurstests** während der Vorlesungszeit bestehen. Die Kurztests werden in den Vorlesungen am 3. Nov., 24. Nov., 15. Dez. und 26. Jan. geschrieben.

Präsenzaufgabe 1. Es seien $A = (a_{ij})$ und B zwei $n \times n$ Matrizen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\det(A) = \det(A^t)$.

(b) $\det(A) + \det(B) \leq |\det(A + B)|$.

(c) $\det((a_{ij})) = \det(((-1)^{i+j} a_{ij}))$.

(d) Es sei $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ eine Permutation. Wir assoziieren zu einer $n \times n$ Matrix M die Matrix M^σ wie folgt: $M^\sigma = (m^\sigma_{ij})$ mit $m^\sigma_{ij} = m_{\sigma(i),j}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\det(A^\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \det(A).$$

Präsenzaufgabe 2. Es sei K ein Körper. Welcher der folgenden Mengen sind unter den gegebenen Strukturen Vektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine Basis an.

(a) $U = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \det(A) = 0\}$ mit der gewöhnlichen Addition $A +_U B := A + B$ für $A, B \in U$ und der gewöhnlichen Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$ für $\lambda \in K$ und $(a_{ij}) \in U$.

(b) Hier sei $K = \mathbb{R}$:
$U = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ mit $x +_U y := x \cdot y$ für $x, y \in U$ und $\lambda \cdot x := x^\lambda$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in U$.

(c) $U = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ mit $(f +_U g)(n) := f(n) + g(n)$ und $(\lambda \cdot f)(n) := \lambda \cdot (f(n))$ für $f, g \in U$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

(d) $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K) \mid f(n) = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}\}$ mit $(f +_U g)(n) := f(n) + g(n)$ und $(\lambda \cdot f)(n) := \lambda \cdot (f(n))$ für $f, g \in U$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$.

(e) $U = \{(A_1, A_2, A_3, ...) \mid A_n = (a(n)_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)\ \forall n \in \mathbb{N}$ und $a(n)_{ij} = a(m)_{ij}\ \forall i, j, m, n \in \mathbb{N}$ mit $i, j \leq \min(m, n)\}$ mit

$$(A_1, A_2, A_3, \dots) +_U (B_1, B_2, B_3, \dots) := (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3, \dots)$$

$$\text{und } \lambda \cdot (A_1, A_2, A_3, ...) := (\lambda \cdot A_1, \lambda \cdot A_2, \lambda \cdot A_3, \dots).$$

Hierbei bezeichne $(A_1, A_2, A_3, ...)$ stets eine unendliche Folge.

Aufgabe 1.1 (2+2 Punkte)**.** Es sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$ Matrix über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\det(A) \leq \left| \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \right)^n \right|$.

(ii) $\det(A) \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \right)^n$.

(b) Es seien $\sigma, \tau \in \mathrm{Sym}(n)$ zwei Permutationen. Wir assoziieren zu einer $n \times n$ Matrix M die Matrix $M^{(\sigma,\tau)}$ wie folgt: $M^{(\sigma,\tau)} = (m_{ij}^{(\sigma,\tau)})$ mit $m_{ij}^{(\sigma,\tau)} = m_{\sigma(i),\tau(j)}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$(A^{(\sigma,\tau)})^{\mathrm{ad}} = (A^{\mathrm{ad}})^{(\sigma,\tau)}.$$

Aufgabe 1.2 (2+2 Punkte)**.** (a) Es seien $x_1, \ldots x_n$ Unbekannte. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

(b) Seien nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ f(\alpha_2) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid f \in \mathbb{R}[X] \text{ mit } \mathrm{grad}(f) < n \right\}.$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist, bestimmen Sie $\dim U$ und geben Sie eine Basis von U an.
Hinweis: Die n-dimensionalen Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det((a_1, \ldots, a_n)) \neq 0$ gilt.

Aufgabe 1.3 (1+1+2 Punkte)**.** Es sei K ein Körper. Welche der folgenden Mengen sind unter den gegebenen Strukturen Vektorräume? Begünden Sie Ihre Antwort und geben Sie gegebenenfalls eine Basis an.

(a) $U = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \mathrm{Sp}(A) = 0\}$ mit der gewöhnlichen Addition $A +_U B := A + B$ für $A, B \in U$ und der gewöhnlichen Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$ für $\lambda \in K$ und $(a_{ij}) \in U$.

Dabei ist die Spur Sp einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ durch die Summe ihrer Diagonaleinträge gegeben: $\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(b) $U = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \det(A) \neq 0\}$ mit der "Addition" $A +_U B := A \cdot B$ für $A, B \in U$ und der gewöhnlichen Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$ für $\lambda \in K$ und $(a_{ij}) \in U$.

(c) $U = \{(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, K) \mid \sum_{j=1}^n a_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{2j} = \cdots = \sum_{j=1}^n a_{nj}\}$. mit der gewöhnlichen Addition $A +_U B := A + B$ für $A, B \in U$ und der gewöhnlichen Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (a_{ij}) := (\lambda \cdot a_{ij})$ für $\lambda \in K$ und $(a_{ij}) \in U$.