Übungsblatt 7

Abgabe am Freitag, 16.12.2016 bis 16 Uhr

Präsenzaufgabe 1. (a) Diagonalisieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie eine orthogonale Zerlegung $\mathbb{R}^3 = W_+ \oplus W_- \oplus W_0$ an, so dass W_0 der Ausartungsraum von A (d.h. $W_0 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v^T Aw = 0 \; \forall w \in \mathbb{R}^3\}$) ist, A positiv definit auf W_+ (d.h. $v^T Av > 0$ für alle $0 \neq v \in W_+$) und negativ definit auf W_- (d.h. $v^T Av < 0$ für alle $0 \neq v \in W_-$) ist.

Präsenzaufgabe 2. Benutzen Sie die Hauptachsentransformation um die Quadrik

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 6$$

in Normalform zu überführen.

Aufgabe 7.1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ist V ein endlich-dimensionaler K Vektorraum und φ ein selbstadjungierter und nilpotenter Endomorphismus von V, so ist $\varphi = 0$.

(b) Es sei $A \in \mathrm{Mat}(2n \times 2n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Ist $\det A > 0$ und hat das charakteristische Polynom von A genau $n+1$ positive und n negative Koeffizienten, so ist A positiv definit (d.h. $v^T Av > 0$ für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^{2n}$).

(c) Sind V und W reelle Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$, so ist auch auf $V \times W$ durch $\langle (v_1, w_1), (v_2, w_2) \rangle := \langle v_1, v_2 \rangle_V + \langle w_1, w_2 \rangle_W$ ein Skalarprodukt definiert.

(d) Es sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Weiter sei φ ein Endomorphismus von V, mit $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$. Dann ist φ stets diagonalisierbar.

Aufgabe 7.2 (1+1+1+1 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{D}$ der Vektorraum der reellwertigen differenzierbaren Funktionen auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$.

(a) Zeigen Sie, dass $d \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}, \quad (f, g) = (f \cdot g)'(0)$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{D}$ definiert.

(b) Bestimmen Sie den Ausartungsraum $\mathcal{D}_0 = \{f \in \mathcal{D} \mid \forall g \in \mathcal{D} : \; d(f, g) = 0\}$ von d.

(c) Es sei nun $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ der Unterraum von $\mathcal{D}$ erzeugt von der Basis $\{1, (x+1), \frac{1}{x+1}, e^{x+1}\}$. Bestimmen Sie eine Matrix, die die Einschränkung von d auf $\mathcal{D}'$ bezüglich dieser Basis repräsentiert und diagonalisieren Sie diese Matrix.

(d) Geben Sie eine orthogonale Zerlegung $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_+ \oplus \mathcal{D}'_- \oplus \mathcal{D}'_0$ an, so dass $\mathcal{D}'_0$ der Ausartungsraum der Einschränkung von d auf $\mathcal{D}'$ ist, d positiv definit auf $\mathcal{D}'_+$ (d.h. $d(f, f) > 0$ für alle $0 \neq f \in \mathcal{D}'_+$) und negativ definit auf $\mathcal{D}'_-$ (d.h. $d(f, f) < 0$ für alle $0 \neq f \in \mathcal{D}'_-$) ist.

Aufgabe 7.3 (1+1+2 Punkte)**.** Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein endlich-dimensionaler Unterraum. Weiter sei $\mathrm{pr}_U \colon V \to V$ die orthogonale Projektion bezüglich U. Wir nennen $s_U := 2\mathrm{pr}_U - \mathrm{id}_V$ die *Spiegelung* an U.

(a) Zeigen Sie, dass $s_U \circ s_U = \mathrm{id}_V$.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von s_U.

(c) Es sei U' ein weiterer endlich-dimensionaler Unterraum von V mit $U \perp U'$ (d.h. $(u, u') = 0$ für alle $u \in U$ und $u' \in U'$). Zeigen Sie, dass $s_U \circ s_{U'} = -s_{U \oplus U'}$.