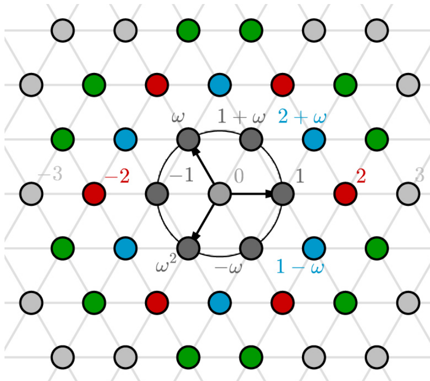
Eisensteinprimzahlen

Eine Primzahl ist eine positive ganze Zahl, welche sich nicht als Produkt von kleineren Zahlen schreiben lässt. So sind zum Beispiel $6 = 2 \cdot 3$ oder $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$ keine Primzahlen, und $3, 5, 7$ oder 101 sind Primzahlen. Die Bedeutung von Primzahlen rührt von der Tatsache, dass sich jede ganze Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben lässt: Dies ist der Fundamentalsatz der Arithmetik. Primzahlen sind also die kleinsten Bauteile, die Atome, der ganzen Zahlen. Die Erforschung von Primzahlen birgt viele einfach zu stellende Fragen, deren Antwort zum Teil bis heute noch nicht gefunden werden konnten.

Erweitert man die ganzen Zahlen um eine weitere „Zahl" ω, welche die Rechenregel $(1 + \omega) = -\omega^2$ befolgt, so erhält man die **Eisensteinzahlen**. Bildlich kann man sich diese wie nebenstehend als Punkte in der Ebene vorstellen. Addiert werden Eisensteinzahlen wie Vektoren in der Ebene. Man kann Eisensteinzahlen aber auch multiplizeren: Zum Beispiel gilt



$$
\begin{aligned}
(2+\omega)\cdot(1-\omega) &= 2 - 2\omega + \omega - \omega^2 \\
&= 2 - \omega + (1+\omega) = 3
\end{aligned}
$$

unter Verwendung der Rechenregel $-\omega^2 = (1+\omega)$ für die mysteriöse Zahl ω. Diese Rechnung zeigt, dass die Primzahl 3 in den Eisensteinzahlen in das Produkt $3 = (2+\omega)\cdot(1-\omega)$ zerfällt, also dort gar keine Primzahl mehr ist! Tatsächlich geht dies auf verschiedene Arten und Weisen – alle möglichen echten Primteiler von 3 sind in der Grafik blau dargestellt. Die Teiler der 7 sind in grün dargestellt.

Das dunkle Poster zeigt die Primzahlen in den Eisensteinzahlen. Die roten Punkte gehören dabei zu den Primzahlen der ganzen Zahlen, wie zum Beispiel der 2 oder 5, die in den Eisensteinzahlen immer noch Primzahlen sind. Die weißen Punkte sind also die wirklich neuen Eisensteinprimzahlen, also diejenigen, die es in den ganzen Zahlen noch nicht gibt. Die auffällige 6-er Symmetrie kommt durch Multiplikation mit den 6 Einheiten $1, -1, \omega, -\omega, \omega^2, -\omega^2$ zustande, welche im kleinen Bild dunkelgrau dargestellt sind.

Das helle Poster zeigt die Primzahlen in dem Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Der vergleich der beiden Bilder illustriert die unterschiede zwischen imaginären und reellen Zahlkörpern

---

[0] Konzeption und Gestaltung von Julia Gemmer und Björn Eder.
Entstanden im Rahmen des Seminars **Zahl & Bild** von Prof. Dr. Manuel Blickle im Wintersemester 2015/16 an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.