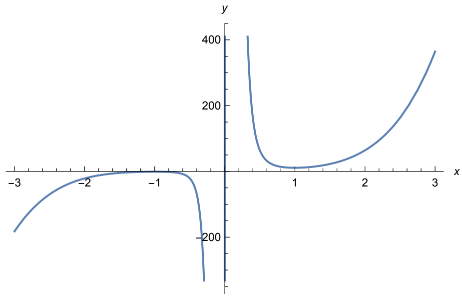
$\mathbb{C}$omplex

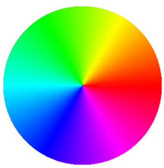
In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^5} \cdot \frac{x^{11}-1}{x-1}$$



dargestellt. An dem Graphen sind, abgesehen von der y-Achse als vertikaler Asymptote, nicht viele Eigenschaften dieser Funktion ablesbar.

Dies ändert sich, wenn man statt des reellen Zahlenstrahls die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ betrachtet, deren Elemente sich als $x = a + ib$, wobei a und b reelle Zahlen sind, schreiben lassen. Diese komplexe Zahl x entspricht dann dem Punkt der Zeichenebene mit Koordinaten (a, b). Man rechnet mit komplexen Zahlen wie üblich unter Verwendung der Regel $i^2 = -1$. Beim Versuch den Graphen einer komplexen Funktion zu realisieren stößt man allerdings auf das Problem, dass dazu 4 Dimensionen nötig sind.



Eine Lösung dieses Darstellungsproblems wird auf dem ausgestellten Poster gezeigt. Die Idee dabei ist es, den Funktionswert $f(x)$ nicht nach oben abzutragen, sondern durch eine Farbe zu kennzeichnen: Jeder komplexen Zahl wird zunächst, abhängig von der Richtung bezüglich des Koordinatenursprungs, eine Farbe gemäß nebenstehender Farbskala zugeordnet. Nun färbt man die Zahl x der komplexen Zahlenebene mit der Farbe des Bildpunktes $f(x) \in \mathbb{C}$ ein.

Tut man dies für die oben beschriebene Funktion $f(x)$ – und fügt noch sinnvoll Schattierungen hinzu – so ergibt sich das auf dem Poster dargestellte Bild. Am fünffachen Durchlaufen des Farbkreises in umgekehrter Reihenfolge ist nun die fünffache Polstelle am Nullpunkt, welche vom Faktor $1/x^5$ stammt, deutlich zu erkennen. Ebenso deutlich lassen sich die 10 kreisförmig angeordneten, einfachen Nullstellen ausmachen. Ausgenommen die 1, liegen diese gerade auf den Eckpunkten eines dem Einheitskreises einbeschriebenen, regelmäßigen 11-Ecks. Es sind gerade die Nullstellen des 11. Kreisteilungspolynoms

$$\frac{x^{11}-1}{x-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10},$$

welches der zweite Faktor unserer Funktion $f(x)$ ist. Und dass am Rande des Bildes der Farbkreis noch fünf weitere Male durchlaufen wird, ist auch kein Zufall ...

[0]Konzeption und Gestaltung von Sven Partenheimer und Daniel Schisch.
Entstanden im Rahmen des Seminars **Zahl & Bild** von Prof. Dr. Manuel Blickle im Wintersemester 2015/16 an der Johannes Gutenberg-Universität Mainz.